MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG

VON

K. KNOPP
TÜBINGEN

E. SCHMIDT
BERLIN

I. SCHUR
BERLIN

HERAUSGEGEBEN

VON

L. LICHTENSTEIN
LEIPZIG

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJÉR E. HECKE G. HERGLOTZ A. KNESER
E. LANDAU O. PERRON F. SCHUR E. STUDY H. WEYL

28. BAND 5. (SCHLUSS-)HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 30. JULI 1928)

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1928

Die

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

erscheint in zwanglosen Heften, die zu Bänden von 50 Bogen vereinigt werden.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung sowie durch die Verlagsbuchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden natürlich auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Die Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 100 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Schriftleitung. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift, etwaige Abbildungen auf einem besonderen Blatt gezeichnet, einzureichen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen und deutschen Buchstaben (Fraktur) sind stets besonders (etwa mit einem farbigen Stift) zu kennzeichnen. Der Text ist in lateinischer Schrift abzufassen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

SCHRIFTLEITUNG DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

K. Knopp, Tübingen, Neckarhalde 55,
L. Lichtenstein, Leipzig, Großgörschenstraße 3,
E. Schmidt, Berlin NW, Altonaerstr. 30,
I. Schur, Berlin-Schmargendorf, Ruhlaerstr. 14.

---

28. Band. **Inhalt:** 5. Heft.

Seite

Rottlaender, A., Nachweis der Existenz nicht-isomorpher Gruppen von gleicher Situation der Untergruppen 641

Stone, M. H., Certain integrals analogous to Fourier integrals 654

Brauer, R., Untersuchungen über die arithmetischen Eigenschaften von Gruppen linearer Substitutionen. (Erste Mitteilung) 677

Tietze, H., Über Konvexheit im kleinen und im großen und über gewisse den Punkten einer Menge zugeordnete Dimensionszahlen 697

Hecke, E., Bestimmung der Perioden gewisser Integrale durch die Theorie der Klassenkörper 708

Mayrhofer, K., Topologische Fragen der Differentialgeometrie. III. 728

Berichtigung zu der Abhandlung von L. Lichtenstein, „Über einige Existenzprobleme der Hydrodynamik", Math. Zeitschrift 28, S. 387—415 752

Nachweis der Existenz nicht-isomorpher Gruppen von gleicher Situation der Untergruppen.

Von

Ada Rottlaender in Köln.

Den Zweck der Galoisschen Theorie pflegt man folgendermaßen zu erklären: Es sei der (gewöhnliche) Körper $\mathfrak{K}$ algebraisch und normal über dem Körper $\mathfrak{K}_0$, und es sei $\mathfrak{H}$ die Galoissche Gruppe von $\mathfrak{K}$ über $\mathfrak{K}_0$. Wenn man dann $\mathfrak{H}$ als abstrakte Gruppe kennt, so vermag man die Situation der zwischen $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_0$ gelegenen Körper zu übersehen.

Nun ist aber klar, daß man dazu gar nicht die abstrakte Gruppe selbst, also die Verknüpfungen der Elemente der Gruppe zu kennen braucht, sondern bloß die Situation ihrer Untergruppen. Wir stellen daher die rein gruppentheoretische Definition auf:

Zwei abstrakte Gruppen endlicher Ordnung $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}'$ heißen *von gleicher Situation der Untergruppen*, wenn sie erstens dieselbe Anzahl Untergruppen haben, und wenn sich zweitens die Untergruppen von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}'$ derart als $\mathfrak{H}_1, \ldots, \mathfrak{H}_k$ bzw. $\mathfrak{H}_1', \ldots, \mathfrak{H}_k'$ numerieren lassen, daß stets

1. $\mathfrak{H}_i$ und $\mathfrak{H}_i'$ von gleicher Ordnung sind,

2. $\mathfrak{H}_i$ dann und nur dann Untergruppe von $\mathfrak{H}_j$ ist, wenn $\mathfrak{H}_i'$ Untergruppe von $\mathfrak{H}_j'$ ist,

3. $\mathfrak{H}_i$ und $\mathfrak{H}_{i'}$ dann und nur dann konjugierte Untergruppen von $\mathfrak{H}_j$ sind, wenn $\mathfrak{H}_i'$ und $\mathfrak{H}_{i'}'$ konjugierte Untergruppen von $\mathfrak{H}_j'$ sind.

Dieser gruppentheoretische Begriff findet also in der Galoisschen Körpertheorie die Anwendung, daß, wenn $\mathfrak{H}$ die Galoissche Gruppe von $\mathfrak{K}$ über $\mathfrak{K}_0$ ist und $\mathfrak{H}'$ die von $\mathfrak{K}'$ über $\mathfrak{K}_0'$, die Körper zwischen $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_0$ dann und nur dann dieselbe Situation — in analog zu präzisierendem Sinn — haben wie die Körper zwischen $\mathfrak{K}'$ und $\mathfrak{K}_0'$, wenn $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}'$ gleiche Situation der Untergruppen haben.

Damit sind zwei Probleme gegeben:

I. Gibt es Gruppen $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}'$, die gleiche Situation der Untergruppen haben und doch nicht isomorph sind?

II. Wenn es solche gibt, was muß zur gleichen Situation der Untergruppen hinzutreten, damit man auf Isomorphie schließen kann, oder in der Anwendung auf Körper: Was kann man aus der Kenntnis der Galoisschen Gruppe als abstrakter Gruppe über die Körper schließen noch außer der Situation der Zwischenkörper?

Die Problemstellung rührt von Herrn E. Fischer her.

Die vorliegende Arbeit hat die Aufgabe, die Frage I zur Entscheidung zu bringen. Ich habe gefunden, daß es unter gewissen von Herrn Hölder, Math Annalen **43**, S. 340, studierten Gruppen tatsächlich solche gibt, welche, ohne isomorph zu sein, gleiche Situation der Untergruppen haben.

Die Frage II scheint ziemlich tief zu liegen. Man kann nämlich aus der Kenntnis der Situation der Untergruppen überraschend viel über die Gruppe schließen. So lassen sich die Abelschen Gruppen an der Situation der Untergruppen erkennen. In der Körpertheorie ist also durch die Situation der Zwischenkörper bereits festgelegt, ob die Galoissche Gruppe Abelsch ist. Allgemeiner kann man aus der Situation der Untergruppen erkennen, nach welchen Anzahlen sich die Elemente der Gruppe in Systeme konjugierter verteilen.

Als Einleitung zu dem Studium der Frage I wird die einfachere Frage behandelt, welche entsteht, wenn wir in der Definition der gleichen Situation der Untergruppen die Forderung 3 weglassen; wir sagen dann, daß $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}'$ *denselben unvollständigen Situationsplan der Untergruppen* besitzen. Durch den unvollständigen Situationsplan der Untergruppen sind die zyklischen Gruppen noch charakterisiert, die Abelschen aber schon nicht mehr, d. h.: eine Abelsche Gruppe kann mit einer nicht-Abelschen denselben unvollständigen Situationsplan der Untergruppen haben.

Inhaltsübersicht.

Kapitel I.

Unvollständiger Situationsplan der Untergruppen.

§ 1. Wenn zwei (endliche) Gruppen gleichen unvollständigen Situationsplan der Untergruppen haben und *eine* von ihnen zyklisch ist, so sind sie isomorph (also beide zyklisch).

§ 2. Wenn zwei Gruppen gleichen unvollständigen Situationsplan der Untergruppen haben und *beide* Abelsch sind, so sind sie isomorph.

§ 3. Wenn von zwei Gruppen mit gleichem unvollständigen Situationsplan der Untergruppen *eine* Abelsch ist, so braucht die andere nicht

Abelsch zu sein. — Bestimmung aller Gruppen, die mit der Abelschen von den Invarianten p^2, p gleichen unvollständigen Situationsplan der Untergruppen haben. Es gibt nur eine nicht-Abelsche für $p > 2$. Für $p = 2$ gibt es gar keine nicht-Abelsche.

Kapitel II.

Vollständiger Situationsplan der Untergruppen.

§ 4. Wenn von zwei Gruppen mit gleichem vollständigen Situationsplan der Untergruppen eine Abelsch ist, so sind sie isomorph (also beide Abelsch).

§ 5. Treten bei der Einteilung der Elemente einer Gruppe in Systeme konjugierter Elemente $f(\delta)$ Systeme von der Gliederzahl δ auf, so haben zwei Gruppen von gleichem vollständigen Situationsplan der Untergruppen stets dieselbe Funktion $f(\delta)$.

§ 6. Hauptsatz: Wenn zwei Gruppen gleichen vollständigen Situationsplan der Untergruppen haben, so brauchen sie nicht isomorph zu sein.

Kapitel I.

§ 1.

Bezeichnung: Ist A Element einer Gruppe, so bedeutet (A) die durch A erzeugte zyklische Untergruppe.

Satz. *Der unvollständige Situationsplan der Untergruppen reicht aus zur Charakterisierung zyklischer Gruppen.*

Beweis. a) Der Beweis wird zunächst für zyklische Gruppen, deren Ordnung eine Primzahlpotenz ist, geführt[1]). $\mathfrak{H}_\pi$ sei eine Gruppe von der Ordnung p^π und habe denselben unvollständigen Situationsplan der Untergruppen wie die zyklische Gruppe gleicher Ordnung. Dann enthält $\mathfrak{H}_\pi$ eine Untergruppe $\mathfrak{H}_{\pi-1}$ von der Ordnung $p^{\pi-1}$, die alle echten Untergruppen von $\mathfrak{H}_\pi$ enthält. Es müssen Elemente von $\mathfrak{H}_\pi$ außerhalb $\mathfrak{H}_{\pi-1}$ liegen. Die Ordnung eines solchen Elementes kann nicht kleiner sein als p^π. Sonst würde dadurch eine zyklische Untergruppe erzeugt, die echte Untergruppe von $\mathfrak{H}_\pi$ wäre, aber dennoch nicht Untergruppe von $\mathfrak{H}_{\pi-1}$.

b) $\mathfrak{H}$ sei eine Gruppe, die den gleichen unvollständigen Situationsplan der Untergruppen hat wie die zyklische Gruppe von der Ordnung

[1]) Herr I. Schur macht mich darauf aufmerksam, daß die zyklischen Gruppen von der Ordnung p^π bei ungeradem p sogar schon dadurch charakterisiert sind, daß sie eine einzige Untergruppe von einer Ordnung p^s enthalten, wo s eine der Zahlen zwischen 0 und π exklusive bedeutet. Burnside, The theory of groups, zweite Auflage, § 104. Für $p = 2$ schließt Herr Schur den unter a) behaupteten Teil des Satzes aus Burnside, § 105.

$p_1^{\pi_1} \cdot p_2^{\pi_2} \dots p_\varrho^{\pi_\varrho}$ ($p_i \neq p_k$ für $i \neq k$). Nach a) läßt sich hieraus schließen, daß $\mathfrak{H}$ eine und nur eine zyklische Untergruppe von der Ordnung $p_i^{\pi_i}$ enthält ($i = 1, \dots, \varrho$). Daher liegt, wenn A_i ein erzeugendes Element der zyklischen Untergruppe von der Ordnung $p_i^{\pi_i}$ bedeutet, $(A_1), \dots, (A_\varrho)$ in $\mathfrak{H}$ invariant. Daher ist $A_i A_k A_i^{-1} A_k^{-1}$ einerseits ein Element von (A_k), andererseits ein Element von (A_i), also gleich E. [2]) $A = A_1 \cdot A_2 \dots A_\varrho$ hat wegen der eben bewiesenen Vertauschbarkeit von $A_1, \dots, A_\varrho$ und der Teilerfremdheit der Ordnungen dieser Elemente die Ordnung $p_1^{\pi_1} \cdot p_2^{\pi_2} \dots p_\varrho^{\pi_\varrho}$, q. e. d.

§ 2.

Satz. *Zwei Abelsche Gruppen von gleichem unvollständigen Situationsplan der Untergruppen sind isomorph.*

Beweis. $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}'$ seien zwei Abelsche Gruppen von gleichem unvollständigen Situationsplan der Untergruppen. $(A_1), \dots, (A_\varrho)$ sei eine Basis von $\mathfrak{H}$, und zwar sei $(A_\varkappa)$ von der Ordnung $p_\varkappa^{\pi_\varkappa}$ ($\varkappa = 1, \dots, \varrho$). Bei einer Zuordnung der Untergruppen von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}'$, die die Bedingungen 1 und 2 erfüllt, möge der Gruppe (A_i) in $\mathfrak{H}$ die Gruppe $\mathfrak{A}_i'$ in $\mathfrak{H}'$ entsprechen ($i = 1, \dots, \varrho$). $\mathfrak{A}_i'$ ist zyklisch nach § 1. Ein erzeugendes Element aus $\mathfrak{A}_i'$ bezeichne ich mit A_i'. Der Komplex $(A_1') \cdot (A_2') \dots (A_\varrho')$ bildet eine Untergruppe von $\mathfrak{H}'$. Würde diese nicht mit $\mathfrak{H}'$ übereinstimmen, so hätten auch $(A_1), \dots, (A_\varrho)$ eine gemeinsame Obergruppe in $\mathfrak{H}$, die von $\mathfrak{H}$ verschieden wäre. Dann könnten aber $(A_1), \dots, (A_\varrho)$ keine Basis von $\mathfrak{H}$ bilden. Da also $(A_1') \cdot (A_2') \dots (A_\varrho')$ jedes Element von $\mathfrak{H}'$ einmal und, da der Komplex $(A_1') \cdot (A_2') \dots (A_\varrho')$ höchstens $p_1^{\pi_1} p_2^{\pi_2} \dots p_\varrho^{\pi_\varrho}$ verschiedene Elemente umfaßt, nur einmal liefert, ist $(A_1'), \dots, (A_\varrho')$ eine Basis von $\mathfrak{H}'$. $\mathfrak{H}'$ hat demnach dieselben Invarianten wie $\mathfrak{H}$.

§ 3.

Auf das Ergebnis des § 1 gestützt, soll im folgenden nachgewiesen werden, daß es schon unter den Abelschen Gruppen solche gibt, die nicht durch den unvollständigen Situationsplan ihrer Untergruppen charakterisiert sind. Ein Beispiel liefert die Abelsche Gruppe mit den Invarianten p^2, p für $p > 2$, die denselben unvollständigen Situationsplan der Untergruppen hat wie eine andere, noch näher anzugebende nicht-Abelsche Gruppe.

I. $\mathfrak{H}'$ sei die Abelsche Gruppe mit den Invarianten p^2, p. Die zyklischen Gruppen (A') und (B') mögen eine Basis von $\mathfrak{H}'$ bilden, und zwar habe (A') die Ordnung p^2 und B' die Ordnung p.

---

[2]) Hier verdanke ich Herrn I. Schur eine Vereinfachung der Rechnung.

Behauptung. $\mathfrak{H}'$ enthält genau eine Untergruppe mit den Invarianten p, p.

Beweis. $\mathfrak{H}_1' = (A'^p)(B')$ ist eine Untergruppe mit den Invarianten p, p. Sie besteht aus den Lösungen von $X^p = E$. Es gibt demnach keine weiteren Untergruppen von $\mathfrak{H}'$ mit denselben Invarianten.

Die Untergruppen von $\mathfrak{H}'$ von der Ordnung p sind Untergruppen von $\mathfrak{H}_1'$. Ihre Anzahl beträgt $p+1$.

Die Elemente außerhalb $\mathfrak{H}_1'$ sind von der Ordnung p^2. Ihre Anzahl beträgt $\varphi(p^2)\cdot p$. Demnach enthält $\mathfrak{H}' : p$ zyklische Gruppen von der Ordnung p^2. Diese haben (A'^p) als gemeinsame Untergruppe, da die p-te Potenz irgendeines Elementes von $\mathfrak{H}'$ in (A'^p) liegt. Also ist $\mathfrak{H}_3' = (A'^p)$ von der Willkür der Basis unabhängig.

Unvollständiger Situationsplan der Untergruppen der Abelschen Gruppe $\mathfrak{H}'$ mit den Invarianten p^2, p:

Gruppen:	$\mathfrak{H}'$,	$\mathfrak{H}_1'$,	$\mathfrak{H}_{2,1}'$,	$\mathfrak{H}_{2,2}'$, ...	$\mathfrak{H}_{2,p}'$,	$\mathfrak{H}_{3,1}'$,	$\mathfrak{H}_{3,2}'$, ...	$\mathfrak{H}_{3,p}'$,	$\mathfrak{H}_3'$,		
Ordnungen:	p^3,	p^2,	p^2,	p^2, ...	p^2,	p,	p, ...	p,	p.		

Nicht-triviale Untergruppen

von $\mathfrak{H}_1'$:	$\mathfrak{H}_{3,1}'$, ...	$\mathfrak{H}_{3,p}'$,	$\mathfrak{H}_3'$,		
von $\mathfrak{H}_{2,i}'$:			$\mathfrak{H}_3'$.		

Also: E ist Schnitt von $\mathfrak{H}_{2,i}'$ und $\mathfrak{H}_{3,j}'$,

$\mathfrak{H}'$ ist kleinste gemeinsame Obergruppe von $\mathfrak{H}_{2,i}'$ und $\mathfrak{H}_{3,j}'$,

$\mathfrak{H}_1'$ ist kleinste gemeinsame Obergruppe von $\mathfrak{H}_{3,1}'$, $\mathfrak{H}_{3,2}'$, ... $\mathfrak{H}_{3,p}'$, $\mathfrak{H}_3'$,

$\mathfrak{H}_3'$ ist Schnitt aller Gruppen der Ordnung p^2.

II. Wir wollen jetzt nachweisen, daß es für $p > 2$ eine und nur eine nicht-Abelsche Gruppe $\mathfrak{H}$ gibt, die denselben unvollständigen Situationsplan der Untergruppen hat wie die Abelsche Gruppe $\mathfrak{H}'$ mit den Invarianten p^2, p.

Nun hat Herr Hölder, Math. Annalen **43**, S. 371 ff., alle nicht-Abelschen Gruppen der Ordnung p^3 bestimmt und gefunden, daß es nur zwei gibt. Der kürzeste Weg zum Beweise unserer Behauptung wäre die Benutzung dieses Resultates von Herrn Hölder. Es scheint mir aber einfacher und besser in den Rahmen unserer Untersuchung passend, die andere Gruppe gar nicht einzumischen und sofort auf die geforderte Gruppe loszusteuern. In einer früheren Fassung dieser Arbeit, die der philosophischen Fakultät der Universität Köln als Dissertation vorlag, habe ich das ausführlich durchgeführt. Ich will es aber jetzt nur skizzieren, da Herr I. Schur mich darauf aufmerksam gemacht hat, daß sich die benutzten Schlüsse schon bei Burnside: The theory of groups, zweite Auflage, Kapitel VIII, §§ 109—112 finden.

Es sei zunächst angenommen, daß eine nicht-Abelsche Gruppe $\mathfrak{H}$ vorliege, die denselben unvollständigen Situationsplan der Untergruppen hat, wie die Abelsche Gruppe $\mathfrak{H}'$ mit den Invarianten p^2, p. Ich denke mir die Untergruppen von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}'$ einander so zugeordnet, daß die Bedingungen 1. und 2. erfüllt sind und bezeichne die Untergruppen von $\mathfrak{H}$ ebenso wie die entsprechenden von $\mathfrak{H}'$, nur ohne Akzente.

Nach dem Situationsplan und nach § 1 sind $\mathfrak{H}_{2,1}$ und $\mathfrak{H}_{3,1}$ zyklische Gruppen von den Ordnungen p^2 und p und, wenn $\mathfrak{H}_{2,1} = (A)$ und $\mathfrak{H}_{3,1} = (B)$ gesetzt wird, der Komplex $(A)(B)$ mit $\mathfrak{H}$, der Komplex $(A^p)(B)$ mit $\mathfrak{H}_1$ identisch. Daher liegt das Element $A^x B^y$, wenn $x \not\equiv 0 \bmod p$ ist, nicht in $\mathfrak{H}_1$ und hat darum die Ordnung p^2. Insbesondere hat

$$C = AB$$

die Ordnung p^2.

Nun gilt der Satz: Wenn p die kleinste in der Ordnung einer Gruppe aufgehende Primzahl ist, so ist jede Untergruppe vom Index p invariant[3]).

Aus diesem Satz folgt zunächst, daß (A) in $\mathfrak{H}$ invariant ist; daher gilt die Gleichung:

$$(A)B = B(A).$$

Aus dieser folgt:

$$A^x B = BA^{x'}$$

und daraus:

$$A^x B^y = B^y A^{x''}. \tag{1}$$

Ebenso besteht die Gleichung:

$$(C)A = A(C)$$

und daher

$$CA = AC^z.$$

Also ist

$$BA = C^z. \tag{2}$$

Dabei ist wegen (1):

$$z \equiv 1 \bmod p.$$

Da aber nach dem Situationsplan $(C^p) = \mathfrak{H}_3$ und $(A^p) = \mathfrak{H}_3$ ist, so ist $(C^p) = (A^p)$ und (2) nimmt die Gestalt an:

$$BA = AB \cdot A^{kp}.$$

Da $\mathfrak{H}$ nicht Abelsch ist, so ist $k \not\equiv 0 \bmod p$, und man kann, indem man statt B ein anderes erzeugendes Element von $\mathfrak{H}_3$ wählt, erreichen, daß

[3]) Dieser Satz folgt unmittelbar aus dem bei Speiser, Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, mit Nr. 42 bezeichneten Satz.

$k = 1$ wird. Es ist dann:

$$(3) \qquad A^{p^2} = E, \quad B^p = E, \quad BA = ABA^p.$$

Umgekehrt wird durch zwei erzeugende Elemente A und B mit den Relationen (3) widerspruchsfrei eine Gruppe $\mathfrak{H}''$ von der Ordnung p^3 definiert.

Wir wollen zeigen, daß dieselbe im Falle $p > 2$ denselben unvollständigen Situationsplan der Untergruppen hat wie die Abelsche Gruppe $\mathfrak{H}'$ mit den Invarianten p^2, p.

Aus den Relationen (3) berechnet man:

$$A^p B = B A^p.$$

Demnach bildet der Komplex $(A^p)(B)$ eine Abelsche Gruppe. Da diese Gruppe von der Ordnung p^2 ist und mehr als eine zyklische Untergruppe von der Ordnung p enthält, hat sie die Invarianten p, p.

Ferner berechnet man aus den Relationen (3)

$$(A^x B^y)^p = A^{x\left[1+\frac{p-1}{2}yp\right]p}.$$

Im Falle $p = 2$ erhalte ich:

$$(A^x B)^2 = A^{x \cdot 4} = E.$$

Daraus ist zu erkennen, daß (A) die einzige zyklische Untergruppe von $\mathfrak{H}$ ist, die die Ordnung 4 hat, während die Abelsche Gruppe $\mathfrak{H}'$ mit den Invarianten 4, 2 deren zwei enthält.

Im Falle $p > 2$ ist:

$$\left(1 + \frac{p-1}{2} yp\right) p \equiv p \bmod p^2.$$

Wenn also $x \not\equiv 0 \bmod p$ ist, so ist $A^x B^y$ ein Element von der Ordnung p^2, wenn $p > 2$ ist. Dieses sind aber die Elemente außerhalb des Komplexes $(A^p)(B)$. Die durch sie erzeugten zyklischen Gruppen haben die gemeinsame Untergruppe (A^p), was ebenfalls aus der Relation

$$(A^x B^y)^p = A^{x\left[1+\frac{p-1}{2}yp\right]p}$$

folgt.

Umgekehrt enthält $\mathfrak{H}''$ keine Untergruppe, zu der es keine entsprechende in $\mathfrak{H}'$ gibt.

Kapitel II.

§ 4.

Satz. *Die Abelschen Gruppen sind durch den vollständigen Situationsplan ihrer Untergruppen zurückbestimmt.*

Beweis. $\mathfrak{H}$ sei eine Abelsche Gruppe mit den Invarianten $p_1^{\pi_1}, \ldots, p_\varrho^{\pi_\varrho}$. $\mathfrak{H} = (A_1)(A_2)\ldots(A_\varrho)$ sei eine Basisdarstellung von $\mathfrak{H}$ und zwar habe $A_\varkappa$ den Grad $p_\varkappa^{\pi_\varkappa}$ für $\varkappa = 1, \ldots, \varrho$.

$\mathfrak{H}'$ sei eine Gruppe von gleicher Situation der Untergruppen wie $\mathfrak{H}$. Die A_i entsprechende Untergruppe ist nach § 1 zyklisch und es sei A_i' ein erzeugendes Element. Aus der Invarianz der Untergruppen (A_i') in $\mathfrak{H}'$ und daraus, daß sie paarweise den Schnitt E haben, folgt, daß der Komplex $(A_1')(A_2')\ldots(A_\varrho')$ eine Abelsche Untergruppe von $\mathfrak{H}'$ ist. Würde diese Untergruppe nicht mit $\mathfrak{H}'$ übereinstimmen, so hätten auch $(A_1), \ldots, (A_\varrho)$ eine gemeinsame Obergruppe in $\mathfrak{H}$, die von $\mathfrak{H}$ verschieden wäre. Dann könnten aber $(A_1), \ldots, (A_\varrho)$ keine Basis von $\mathfrak{H}$ bilden. Nach § 2 hat $\mathfrak{H}'$ dieselben Invarianten wie $\mathfrak{H}$.

Es ist noch zu bemerken, daß nicht schon die Invarianz sämtlicher Untergruppen die Abelschen Gruppen vor allen andern auszeichnet. Die allgemeinsten Gruppen mit dieser Eigenschaft hat Dedekind aufgestellt und als Hamiltonsche Gruppen bezeichnet [4]).

§ 5.

Das Ziel dieses Paragraphen ist der Beweis der folgenden Tatsache: Sind zwei Gruppen $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}'$ von gleicher Situation der Untergruppen, so kann ich die Elemente der beiden Gruppen einander so zuordnen, daß konjugierten Elementen konjugierte Elemente entsprechen.

Die Anzahl der zu einem Element konjugierten Elemente wird durch den Index der Gruppe gegeben, die aus allen mit dem Element vertauschbaren Elementen besteht. Diese Tatsache wird im folgenden benutzt. Es sei A ein Element der Gruppe h-ter Ordnung $\mathfrak{H}$, und es gehöre A einem δ-gliedrigen System konjugierter Elemente an. Ferner sei $\mathfrak{V}$ die Gruppe, die aus den mit A vertauschbaren Elementen besteht. Dann ist δ der Index von $\mathfrak{V}$ in $\mathfrak{H}$ und daher Teiler von h. Sind A und A' zwei erzeugende Elemente derselben zyklischen Gruppe $\mathfrak{A}$, so haben sie dieselbe Gruppe $\mathfrak{V}$, so daß $\mathfrak{V}$ und δ nur von $\mathfrak{A}$ abhängen.

Satz. $\mathfrak{V}$ *ist die kleinste gemeinsame Obergruppe aller Abelschen Obergruppen von* $\mathfrak{A}$ *und daher aus der vollständigen Situation von* $\mathfrak{A}$ *innerhalb* $\mathfrak{H}$ *zu entnehmen* (nach § 4).

Beweis. Es sei $\mathfrak{W}$ die kleinste gemeinsame Obergruppe aller Abelschen Obergruppen $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{A}$. Jedes $\mathfrak{M}$ liegt in $\mathfrak{V}$. Also ist $\mathfrak{V} \geqq \mathfrak{W}$. Jedes Element V aus $\mathfrak{V}$ liegt in der Abelschen Gruppe: $\mathfrak{M} = \mathfrak{A}(V)$, also in $\mathfrak{W}$; daher ist $\mathfrak{V} \leqq \mathfrak{W}$. Also ist $\mathfrak{V} = \mathfrak{W}$.

---

[4]) R. Dedekind, Über Gruppen, deren sämtliche Teiler Normalteiler sind, Math. Annalen **48**.

Nun sei für jeden Teiler δ von h: $f(\delta)$ die Anzahl der δ-gliedrigen Systeme von konjugierten Elementen.

Satz. *Die Funktion $f(\delta)$ ist aus dem vollständigen Situationsplan der Untergruppen zu entnehmen.*

Beweis. Man erhält alle Elemente von $\mathfrak{H}$ ohne Wiederholung, wenn man alle zyklischen Gruppen aufsucht und von jeder die erzeugenden Elemente nimmt. Zu jeder zyklischen Gruppe $\mathfrak{A}$ hat man nach dem vorigen Satz eine durch den vollständigen Situationsplan der Untergruppen von $\mathfrak{H}$ bestimmte Gruppe $\mathfrak{B}$, also ein δ. Schreibt man dieses δ so oft auf, wie die Anzahl der erzeugenden Elemente von $\mathfrak{A}$ angibt, und tut dies für jede zyklische Gruppe $\mathfrak{A}$, so erhält man eine Liste: $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_h$, welche nichts anderes ist als das Verzeichnis der zu den h Elementen A aus $\mathfrak{H}$ gehörigen Zahlen δ. In dieser Liste kommt jeder Teiler δ von h genau $f(\delta)\cdot\delta$-mal vor, so daß $f(\delta)$ aus dieser Liste und also aus dem vollständigen Situationsplan der Untergruppen zu entnehmen ist.

Bemerkung. Der letzte Satz ist von Interesse wegen der Primidealdichtigkeiten[5]).

§ 6.

Ich gehe dazu über, spezielle Gruppen anzugeben, die nicht isomorph sind, obwohl sie den gleichen vollständigen Situationsplan der Untergruppen haben.. Solche Gruppen finden sich unter denjenigen Gruppen von der Ordnung $p\cdot q^2$, wo $q > p$ und p und q Primzahlen bedeuten, die durch folgende Eigenschaften ausgezeichnet sind: Sie enthalten eine Abelsche Untergruppe mit den Invarianten q, q, die in der ganzen Gruppe invariant ist. Diese enthält wiederum zwei Untergruppen von der Ordnung q, die selbst invariant in der ganzen Gruppe sind. — Diese Gruppen sind in der erwähnten Arbeit von Herrn Hölder definiert und eingehend behandelt. Sie werden durch drei erzeugende Elemente S, T_1, T_2 mit den Relationen:

$$S^p = E, \quad S^{-1} T_1 S = T_1^{\varrho}, \quad S^{-2} T_2 S = T_2^{\varrho^{\mu}}, \quad T_1^q = T_2^q = E, \quad T_1 T_2 = T_2 T_1$$

definiert. Dabei soll μ als eine bestimmte der Zahlen $0, 1, \ldots, p-1$ gegeben sein und ϱ als eine bestimmte der Zahlen, die $\bmod q$ zum Exponenten p gehören. Für die Existenz eines solchen ϱ ist die Kongruenz: $q - 1 \equiv 0 \bmod p$ notwendig und hinreichend. Die durch obige Relationen definierte Gruppe nenne ich $\mathfrak{H}_{\mu}$. Herr Hölder weist nach, welche der Gruppen $\mathfrak{H}_0, \ldots, \mathfrak{H}_{p-1}$ isomorph sind. Dabei ergibt sich folgendes:

---

[5]) Über eine Arbeit von Herrn Tschebotareff, Otto Schreier, Abhandlungen aus dem Math. Sem. der Hamb. Univ. 5, H. 1/2.

μ und μ' liefern nur dann dieselben Gruppen, wenn $\mu\mu' \equiv 1 \bmod p$.

Für $p = 2$ ergeben $\mu = 0$ und $\mu = 1$ nicht-isomorphe Gruppen.

Für $p = 3$ ergeben $\mu = 0, 1, 2$ nicht-isomorphe Gruppen.

Für $p > 3$ zerfallen die Werte von μ außer $\mu = 0, 1, p-1$ in Paare, so daß jedesmal die Zahlen desselben Paares isomorphe Gruppen liefern.

Im folgenden soll der Situationsplan der Untergruppen dieser Gruppen ermittelt werden, soweit sie für unsern Zweck in Betracht kommen.

$\Gamma = (T_1)(T_2)$ ist die einzige Gruppe von der Ordnung q^2 und außerhalb Γ gibt es in $\mathfrak{H}_\mu$ keine Untergruppe von der Ordnung q. Das ergibt sich unmittelbar aus den Sylow-Sätzen. Folglich sind alle Elemente außerhalb Γ von der Ordnung p oder $p \cdot q$. Damit Elemente von der Ordnung $p \cdot q$ vorhanden sind, ist erforderlich, daß ein Element p-ter Ordnung existiert, das mit einem Element q-ter Ordnung vertauschbar ist. Die Elemente q-ter Ordnung sind mir bekannt als die Elemente $T_1^{x_1} T_2^{x_2}$, für die nicht zugleich $x_1 \equiv 0 \bmod q$ und $x_2 \equiv 0 \bmod q$ sind. Unter den Elementen $S^y T_1^{x_1'} T_2^{x_2'}$, wo $y \not\equiv 0 \bmod p$, finden sich die Elemente von der Ordnung p. Ich habe also zu untersuchen, wann unter den gegebenen Bedingungen:

$$T_1^{x_1} T_2^{x_2} S^y T_1^{x_1'} T_2^{x_2'} = S^y T_1^{x_1} T_2^{x_2} T_1^{x_1'} T_2^{x_2'}$$

ist. Aus den definierenden Relationen folgt:

$$T_1^{x_1} T_2^{x_2} S^y T_1^{x_1'} T_2^{x_2'} = S^y T_1^{x_1 \varrho^y} T_2^{x_2 \varrho^{\mu y}} T_1^{x_1'} T_2^{x_2'}.$$

Die Bedingung für Vertauschbarkeit lautet demnach:

$$x_1 \equiv x_1 \varrho^y \bmod q \quad \text{und} \quad x_2 \equiv x_2 \varrho^{y \cdot \mu} \bmod q.$$

Unter den angegebenen Voraussetzungen ist das gleichbedeutend mit:

$$x_1 \equiv 0 \bmod q \quad \text{und} \quad \mu = 0.$$

Die Gruppe $\mathfrak{H}_0$ ist demnach unter den Gruppen $\mathfrak{H}_0, \mathfrak{H}_1, \ldots, \mathfrak{H}_{p-1}$ die einzige, welche eine zyklische Untergruppe von der Ordnung $p \cdot q$ enthält. Daher ist sie unbrauchbar für unsern Zweck, und wir machen von nun an die Voraussetzung $\mu > 0$. Dann sind alle Elemente außerhalb Γ von der Ordnung p. Sie verteilen sich auf q^2 zyklische Untergruppen, die nach den Sylow-Sätzen innerhalb $\mathfrak{H}_\mu$ konjugiert sind. Ich suche eine Einsicht zu gewinnen, ob und wie sich die Untergruppen von Γ zu Systemen konjugierter Untergruppen bezüglich $\mathfrak{H}_\mu$ zusammenfassen lassen.

Um sämtliche zu $(T_1^{x_1} T_2^{x_2})$ konjugierten Untergruppen zu erhalten, genügt es, $(T_1^{x_1} T_2^{x_2})$ mit den Potenzen von S zu transformieren. Hieraus folgt, da $p < q$: wenn $(T_1^{x_1} T_2^{x_2})$ nicht invariant in $\mathfrak{H}_\mu$ ist, so beträgt die Anzahl der zu $(T_1^{x_1} T_2^{x_2})$ konjugierten Untergruppen: p.

Aus der Gleichung

$$T_1^{x_1} T_2^{x_2} S = S\, T_1^{x_1 \varrho} T_2^{x_2 \varrho^\mu}$$

folgt, daß für $\mu \neq 1$: $(T_1^{x_1} T_2^{x_2})$ nicht invariant in $\mathfrak{H}_\mu$ liegt; es sei denn, daß x_1 oder $x_2 \equiv 0 \bmod q$ ist.

Von jetzt an mache ich die Voraussetzung: $\mu > 1$. Dann zerfallen die $q+1$ Gruppen von der Ordnung q außer (T_1) und (T_2) in $\frac{q-1}{p}$ Bündel von je p innerhalb $\mathfrak{H}_\mu$ konjugierten Untergruppen.

Jetzt habe ich die Untergruppen von der Ordnung $p \cdot q$ aufzusuchen. Wenn solche existieren, finden sie sich unter den Komplexen: $(S')(T_1^{x_1} T_2^{x_2})$, wo S' ein beliebiges Element von der Ordnung p bedeutet. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $(S')(T_1^{x_1} T_2^{x_2})$ eine Gruppe bildet, lautet:

$$(S')(T_1^{x_1} T_2^{x_2}) = (T_1^{x_1} T_2^{x_2})(S').$$

Ich nehme zunächst $S' = S$ und frage, wann (S) mit $(T_1^{x_1} T_2^{x_2})$ vertauschbar ist. Das läßt sich aus der Relation:

$$T_1^{x_1} T_2^{x_2} S^\varkappa = S^\varkappa\, T_1^{x_1 \varrho^\varkappa} T_2^{x_2 \varrho^{\varkappa \mu}}$$

entnehmen. Ich habe zwei Fälle zu unterscheiden:

1. $x_1 \not\equiv 0 \bmod q$ und $x_2 \not\equiv 0 \bmod q$.

Damit $S^\varkappa T_1^{x_1 \varrho^\varkappa} T_2^{x_2 \varrho^{\varkappa \mu}}$ in $(S)(T_1^{x_1} T_2^{x_2})$ enthalten ist, muß $\mu = 1$ sein. Diesen Fall haben wir aber schon ausgeschlossen.

2. a) $x_1 \equiv 0 \bmod q$, $x_2 \not\equiv 0 \bmod q$,

b) $x_1 \not\equiv 0 \bmod q$, $x_2 \equiv 0 \bmod q$.

Es folgt, daß $(S)(T_1)$ und $(S)(T_2)$ Gruppen bilden.

An Stelle von S könnte ich jedes Element $S' = S^y T_1^{x_1} T_2^{x_2}$, wo $y \not\equiv 0 \bmod p$, zur Definition der Gruppe verwenden. Die definierenden Relationen heißen dann:

$$S'^p = E, \quad T_1 S' = S' T_1^{\varrho^y}, \quad T_2 S' = S' T_2^{\varrho^\mu y}, \quad T_1^q = T_2^q = E, \quad T_1 T_2 = T_2 T_1.$$

Daraus entnehmen wir das Resultat: Die Komplexe $(S')(T_1)$ und $(S')(T_2)$ und nur diese liefern Gruppen von der Ordnung $p \cdot q$.

$\mathfrak{S}$ sei eine dieser Gruppen von der Ordnung $p \cdot q$. Nach den Sylow-Sätzen muß $\mathfrak{S}$ mindestens eine Untergruppe von der Ordnung q enthalten. Enthielte sie mehr als eine, so enthielte sie mehr als q Elemente aus Γ, also ganz Γ, was mit der Ordnung $p \cdot q$ von $\mathfrak{S}$ in Widerspruch steht. Die abermalige Anwendung der Sylow-Sätze ergibt, daß in $\mathfrak{S}$ genau q konjugierte Untergruppen von der Ordnung p sind.

Bedeuten S' und S'' zwei Elemente von der Ordnung p aus $\mathfrak{H}_\mu$, so sind die Untergruppen $(S')(T_1)$ und $(S'')(T_1)$ entweder identisch oder sie haben keine Untergruppe von der Ordnung p gemeinsam. Im letzteren Falle haben sie den Schnitt (T_1). $\mathfrak{H}_\mu$ enthält q^2 Untergruppen von der Ordnung p; jede Untergruppe von der Ordnung $p \cdot q$ enthält deren q. Es folgt, daß $\mathfrak{H}_\mu$ genau q verschiedene Untergruppen von der Ordnung $p \cdot q$ enthält, die (T_1) als Untergruppe haben. — Entsprechendes gilt für (T_2).

Transformiere ich $(S)(T_1)$ mit einem beliebigen Element A aus $\mathfrak{H}_\mu$, so entsteht $A^{-1}(S)A(T_1)$. Durchläuft A sämtliche Elemente von $\mathfrak{H}_\mu$, so durchläuft $A^{-1}(S)A$ sämtliche Untergruppen von der Ordnung p, da diese alle konjugiert sind. — Ebenso findet man, daß die q Gruppen von der Ordnung $p \cdot q$, die (T_2) als Untergruppe enthalten, konjugiert sind.

Jede Untergruppe von der Ordnung p liegt in zwei nicht-konjugierten Untergruppen von der Ordnung $p \cdot q$, da sich auf jedes der beiden Bündel konjugierter Untergruppen von der Ordnung $p \cdot q$ sämtliche Untergruppen der Ordnung p verteilen. Zwei solcher nicht-konjugierter Untergruppen können aber auch nicht mehr als eine Untergruppe von Primzahlordnung gemeinsam haben, da sie sonst identisch sein müßten. Wie wir wissen, enthält jede Untergruppe von der Ordnung $p \cdot q$ genau q Untergruppen von der Ordnung p, die also in *verschiedenen* der q konjugierten Untergruppen des andern Bündels enthalten sind. Wir erhalten demnach das Resultat: Jede Untergruppe der Ordnung $p \cdot q$ schneidet jede nicht konjugierte Untergruppe der Ordnung $p \cdot q$ in einer und nur einer Untergruppe von der Ordnung p.

Vollständiger Situationsplan der Untergruppen für $\mathfrak{H}_\mu$, $\mu > 1$.

1. Verzeichnis der nicht-trivialen Untergruppen mit ihren Ordnungen:

$$\Gamma, \underbrace{\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \mathfrak{Q}_{i,j}\begin{pmatrix} i = 1, \ldots, \frac{q-1}{p} \\ j = 1, \ldots, p \end{pmatrix}}_{q^2 \quad q}, \quad \underbrace{\mathfrak{S}_i\,(i = 1, \ldots, q),\ \mathfrak{T}_j\,(j = 1, \ldots, q)}_{p \cdot q},$$

$$\underbrace{\mathfrak{P}_{i,j}\begin{pmatrix} i = 1, \ldots, q \\ j = 1, \ldots, q \end{pmatrix}}_{p}.$$

2. Verzeichnis der Untergruppen von jeder einzelnen Untergruppe, geteilt in Systeme, die in bezug auf diese Untergruppe konjugiert sind; wobei die Teilung durch das Zeichen ; angegeben ist:

von $\mathfrak{H}_\mu$: $\Gamma; \mathfrak{A}_1; \mathfrak{A}_2; \underbrace{\mathfrak{A}_{1,j}}_{j=1,\ldots,p}; \ldots; \underbrace{\mathfrak{A}_{\frac{q-1}{p},j}}_{j=1,\ldots,p};$

$$\underbrace{\mathfrak{S}_i}_{i=1,\ldots,q}; \underbrace{\mathfrak{T}_j}_{j=1,\ldots,q}; \underbrace{\mathfrak{P}_{i,j}}_{i,j=1,\ldots,q}$$

von Γ: $\mathfrak{A}_1; \mathfrak{A}_2; \mathfrak{A}_{1,1}; \mathfrak{A}_{1,2}; \ldots; \mathfrak{A}_{\frac{q-1}{p},p}$

von $\mathfrak{S}_i$: $\mathfrak{A}_1; \underbrace{\mathfrak{P}_{i,j}}_{j=1,\ldots,q}$

von $\mathfrak{T}_j$: $\mathfrak{A}_2; \underbrace{\mathfrak{P}_{i,j}}_{i=1,\ldots,q}$.

Für $\mu > 1$ haben also sämtliche Gruppen $\mathfrak{H}_\mu$ denselben vollständigen Situationsplan der Untergruppen.

(Eingegangen am 4. April 1927.)

Certain integrals analogous to Fourier integrals[1]).

Von

M. H. Stone in Cambridge, Mass., U. S. A.

We shall discuss several types of integral suggested by Fourier's well-known theorem on the representation of an arbitrary function by a double integral[2]). Two of these types arise naturally in the study of the flow of heat in an infinite or semi-infinite bar of heterogeneous character. They bear a relation to Fourier integrals exactly like that of Sturm-Liouville series to Fourier series. In fact, we obtain our results by passing to the limit from a finite bar to an infinite or semi-infinite bar, by passing from infinite series to definite integrals. Consequently our work has numerous points of contact with papers on Sturm-Liouville and related expansions[3]), as well as with the work of Hilb, Weyl, Plancherel, and Carleman on singular integral equations[4]). The formulae which we encounter in the course of these investigations can then be reproduced in the case of Hankel's integral in terms of Bessel functions; the resulting treatment of this integral appears to be simpler and fuller than those now in common use[5]).

---

[1]) Presented to the American Mathematical Society, September 9, 1926.

[2]) See, for instance, Hobson, The Theory of Functions of a Real Variable, Cambridge, 1926, second edition, 2, chapter 9; Hardy, Transactions of the Cambridge Philosophical Society **21** (1912), pp. 427—451.

[3]) Birkhoff, Transactions of the American Mathematical Society **9** (1908), pp. 373 to 395, and Rendiconti di Palermo **36** (1913), pp. 115—126; Tamarkin, Rendiconti di Palermo **34** (1912), pp. 345—382 and Mathematische Zeitschrift **27** (1927), pp. 1—54; Stone, Transactions of the American Mathematical Society, **28** (1926), pp. 695—761.

[4]) Hilb, Mathematische Annalen **66** (1908), pp. 1—66; Weyl, ibid. **68** (1910), pp. 220—269; Plancherel, ibid., **67** (1909), pp. 519—534; Hilb, ibid. **76** (1915), pp. 333—339; Carleman, Sur les équations intégrales singulières, Uppsala 1923.

[5]) See, for instance, Watson, The Theory of Bessel Functions, Cambridge 1922, chapter 14; Titchmarsh, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **21** (1923), pp. 463—473.

§ 1.

The Problem of the Infinite Bar.

The equation for the flow of heat in a rectilinear bar with insulated surface is

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial U}{\partial x}\right) - cd\frac{\partial U}{\partial t} = 0,$$

where x is the algebraic distance along the bar measured from a fixed point on it, t is the time, and U is the temperature, and where k, c, and d are functions of x representing the thermal conductivity, the specific heat, and the density respectively[6]). The temperature is given at the time $t = 0$; and conditions at the endpoints are prescribed in the case of the semi-infinite or finite bar. It is required to determine the temperature function for $t > 0$.

The standard method of reducing the solution of the partial differential equation to that of ordinary equations by separating the variables x and t leads us to study the equation

$$(ku')' + \varrho^2 c\, du = 0, \tag{1}$$

where ϱ is a complex parameter. To effect the solution of the physical problem we must investigate the possibility of representing an arbitrary function $f(x)$ in terms of solutions of this equation[7]).

We shall assume that k, c, d are of such nature that the Liouville transformation takes (1) into a new equation

$$u'' + (\varrho^2 + g)u = 0, \qquad -\infty < x < +\infty, \tag{2}$$

where g is absolutely integrable in the sense of Lebesgue over the infinite interval. The assumption is not entirely arbitrary as comparison with the results of Weyl shows[4]). It is analogous to the stronger hypotheses of Hilb and Plancherel[4]). For cases in which k, c, d are not so restricted we refer to the general theories of singular integral equations cited in the footnote[4]).

The general existence theorems for differential equations of the type of (2) we have given in § 1 of our paper cited in footnote[3]). The existence of solutions having suitable asymptotic forms is demonstrated in a manner similar to that employed in the paper just mentioned; but the proof is complicated by the fact that we are dealing with an infinite interval. We obtain the following theorem.

---

[6]) Riemann-Weber, Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik 2, chapter 5.

[7]) Horn, Partielle Differentialgleichungen, Leipzig 1910, § 63.

Theorem I. *There exist two linearly independent solutions of the differential equation* (2), u_1 *and* u_2, *which as functions of* ϱ *are analytic in the half-plane* $J(\varrho) > 0$ *and continuous in the region* $J(\varrho) \geqq 0$, *except possibly at* $\varrho = 0$, *and which together with their first derivatives can be expressed in the asymptotic forms*

$$u_j^{(k)}(x, \varrho) = (\varrho\omega_j)^k e^{\varrho\omega_j x}\left(1 + \frac{m(x, \varrho)}{\varrho}\right),$$

$$\omega_1 = i,\ \omega_2 = -i;\ j = 1, 2;\ k = 0, 1,$$

where $m(x, \varrho)$ *is a generic notation for functions of* x *and* ϱ *uniformly bounded,* $-\infty < x < +\infty$, $J(\varrho) \geqq 0$, *for sufficiently large values of* $|\varrho|$. *If there is a positive number* H *such that* $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2H|y|}|g|\,dy$ *exists, then* u_1 *and* u_2 *are analytic in the half-plane* $J(\varrho) > -H$.

The existence and properties of the functions u_1, u_2 are deduced from the integral equations

$$u_1(x) = e^{\varrho i x} - \frac{1}{\varrho}\int_{+\infty}^{x} \sin\varrho(x-y)\, g(y)\, u_1(y)\, dy,$$

$$u_2(x) = e^{-\varrho i x} - \frac{1}{\varrho}\int_{-\infty}^{x} \sin\varrho(x-y)\, g(y)\, u_2(y)\, dy.$$

We shall take the first as typical and indicate briefly the reasoning involved.

To study the first equation when $|\varrho|$ is large we treat it as a Fredholm equation. We let $H \geqq 0$ be a number such that $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2H|y|}|g|\,dy$ exists. Then we set

$$u_1 = e^{\varrho i x - 2Hx} z_1;$$

$$K(x, y; \varrho) = +(e^{2H(x-y)} - e^{2(\varrho + Hi)i(y-x)})\, g(y)/2i, \quad -\infty < x \leqq y < +\infty,$$

$$K(x, y; \varrho) = \quad 0\ , \qquad\qquad -\infty < y \leqq x < +\infty,$$

so that the equation becomes

$$z_1(x) = e^{2Hx} + \frac{1}{\varrho}\int_{-\infty}^{+\infty} K(x, y;\ \varrho)\, z_1(y)\, dy.$$

To solve this equation we form the infinite series

$$z_1(x) = a_0(x) + a_1(x) + \ldots + a_n(x) + \ldots,$$

$$a_0(x) = e^{2Hx}, \qquad a_n(x) = \frac{1}{\varrho}\int_{-\infty}^{+\infty} K(x, y;\ \varrho)\, a_{n-1}(y)\, dy.$$

Since $|K(x, y; \varrho)| \leqq |g|$ for all values of x and y and for all values of ϱ such that $J(\varrho) \geqq -H$, we find

$$|a_1| \leqq \frac{1}{|\varrho|} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2H|y|} |g| \, dy = \frac{Q_1}{|\varrho|},$$

$$|a_n| \leqq \frac{|a_{n-1}|}{|\varrho|} \int_{-\infty}^{+\infty} |g| \, dy = \frac{Q_2 |a_{n-1}|}{|\varrho|} \leqq \frac{Q_1 Q_2^{n-1}}{|\varrho|^n}.$$

Consequently, the infinite series converges absolutely and uniformly $-\infty < a \leqq x \leqq b < +\infty$, $J(\varrho) \geqq -H$, for $|\varrho|$ sufficiently large, and defines a function $z_1(x, \varrho)$ continuous on this range, and analytic in the region $J(\varrho) > -H$. This function satisfies the integral equation, and is easily shown to be unique. In particular, if $\bar{z}_1$ is the function obtained when $H = 0$, we can show that $e^{2Hx}\bar{z}_1 \equiv z_1$ by reasoning which is perfectly general. The series defining $e^{2Hx}\bar{z}_1 - z_1 = Z$ give us the inequality $|Z| \leqq Me^{2H|x|}$; the function Z satisfies the equation

$$Z = \frac{1}{\varrho} \int_{-\infty}^{+\infty} K(x, y; \varrho) Z(y) \, dy$$

and the inequalities

$$|Z| \leqq \frac{MQ_1}{|\varrho|}, \qquad |Z| \leqq \frac{MQ_1 Q_2^{n-1}}{|\varrho|^n}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

It is obvious that Z is identically zero. Now concerning $\bar{z}_1$ we know by its definition that it is uniformly bounded, $-\infty < x < +\infty$, $J(\varrho) \geqq 0$, for $|\varrho|$ sufficiently large. It follows that we can write

$$\bar{z}_1 = 1 + \frac{m(x, \varrho)}{\varrho}$$

since from the integral equation

$$|\bar{z}_1 - 1| \leqq \frac{1}{|\varrho|} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} K(x, y; \varrho) \bar{z}_1 \, dy \right| \leqq \frac{mQ_2}{|\varrho|}.$$

Consequently u_1 has the character ascribed to it in the theorem, for $|\varrho|$ sufficiently great. It is easy to justify the differentiation of the integral equation satisfied by u_1 and thus to prove that u_1 satisfies equation (2). Since

$$u_1' = \varrho i e^{\varrho i x} - \int_{+\infty}^{x} \cos \varrho (x - y) \, g(y) \, u_1(y) \, dy$$

the asymptotic form for u_1' can be obtained from that for u_1.

To ascertain the character of the function u_1 throughout the domain $J(\varrho) \geqq -H$, we treat the equation for u_1 as a Volterra equation, in the

reduced form

$$z_1(x) = e^{2Hx} - \frac{1}{\varrho}\int_{+\infty}^{x} K(x, y; \varrho)\, z_1(y)\, dy.$$

The function $K(x, y; \varrho)/\varrho$ is analytic at $\varrho = 0$, satisfying the inequalities

$$|K(x, y; \varrho)/\varrho| = e^{2H(x-y)} \left|\int_0^{y-x} e^{2\varrho i t}\, dt\right| |g| \leqq e^{2H(x-y)} |g| \int_0^{y-x} e^{-2r_2 t}\, dt$$

$$\leqq e^{2(H+\theta r_2)(x-y)} (y-x)|g| \leqq C_\eta |g|,$$

$$0 < \theta < 1, \quad \varrho = r_1 + i r_2, \quad r_2 \geqq -H + \eta, \quad -\infty < x \leqq y < +\infty;$$

and

$$|K(x, y; \varrho)/\varrho| \leqq C_\varepsilon |g|, \quad |\varrho| \geqq \varepsilon, \quad -\infty < x \leqq y < +\infty, \; J(\varrho) \geqq -H.$$

If we put

$$b_0(x) = e^{2Hx}, \quad b_n(x) = -\frac{1}{\varrho}\int_{+\infty}^{x} K(x, y; \varrho)\, b_{n-1}(y)\, dy,$$

we find

$$|b_1(x)| \leqq C_\eta \int_x^\infty e^{2H|y|} |g|\, dy = B_1(\eta, x),$$

$$|b_n(x)| \leqq C_\eta |b_{n-1}| \int_x^\infty |g|\, dy = B_2(\eta, x)\, |b_{n-1}| \leqq B_1 B_2^{n-1},$$

for $r_2 \geqq -H + \eta > -H$. Clearly $\lim_{x \to \infty} B_2(\eta, x) = 0$. Thus the infinite series

$$b_0(x) + b_1(x) + \ldots + b_n(x) + \ldots$$

converges absolutely and uniformly to a function $z_1(x, \varrho)$ analytic in ϱ when $J(\varrho) \geqq -H + \eta$, $X_\eta \leqq x < \infty$. This function satisfies the integral equation. Similarly,

$$|b_1(x)| \leqq C_\varepsilon \int_x^\infty e^{2H|y|} |g|\, dy = C_1(\varepsilon, x),$$

$$|b_n(x)| \leqq C_\varepsilon \int_x^\infty |g|\, dy \cdot |b_{n-1}| = C_2(\varepsilon, x)\, |b_{n-1}| \leqq C_1 C_2^{n-1},$$

for $|\varrho \geqq \varepsilon$, $r_2 \geqq -H$. Here $\lim_{x \to \infty} C_2(\varepsilon, x) = 0$. Thus $z_1(x, \varrho)$ is continuous in x and ϱ, $X_\varepsilon \leqq x < \infty$, $J(\varrho) \geqq -H$, $|\varrho| \geqq \varepsilon$. To establish the theorem we have to remove the restrictions on the variable x. From z, we form the function u, and employ its properties to obtain the desired result. We choose X greater than X_η and X_ε. Then $u_1(x, \varrho)$ is defined, $X \leqq x < \infty$, by the treatment just carried through, is analytic in ϱ, $J(\varrho) \geqq -H + \eta$, and is continuous in ϱ when $J(\varrho) \geqq -H$,

$|\varrho| \geqq \varepsilon$; furthermore, it satisfies the integral equation and, consequently, the equation (2); it is identical for large values of $|\varrho|$ with the function u_1 defined by the Fredholm method. We let U_1, U_2 be solutions of (2) satisfying the boundary conditions

$$U_1(X) = 1, \quad U_1'(X) = 0,$$
$$U_2(X) = 0, \quad U_2'(X) = 1.$$

These are entire functions of ϱ^2. Thus the function

$$u_1(x, \varrho) \equiv u_1(X, \varrho)\, U_1(x, \varrho) + u_1'(X, \varrho)\, U_2(x, \varrho)$$

has its analytic character in ϱ determined, for all x, by the functions $u_1(X, \varrho)$ and $u_1'(X, \varrho)$, the nature of which we have just indicated. The statements of our theorem follow without difficulty.

We are now able to proceed with the central problem. In order to solve it, we shall consider the infinite bar as the limit of a finite bar with end-points $x = -a$, $x = +a$. For such a finite bar we start the solution in the usual manner. If $f(x)$ is an arbitrary function absolutely integrable on the infinite interval, we can form the expression

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^{+a} f(y) \int_{\Gamma} 2\varrho\, G_a(x, y; \varrho^2)\, d\varrho\, dy,$$

in which the following notations have been employed: Γ indicates the semicircle $|\varrho| = R$, $0 \leqq \arg \varrho \leqq \pi$; and G_a is the Green's function for the differential system

$$(2') \qquad \begin{aligned} u'' + (\varrho^2 + g)\, u &= 0, \\ W_1(u) = 0, \quad W_2(u) &= 0, \end{aligned}$$

where W_1 and W_2 are linearly independent linear homogeneous expressions in $u(-a)$, $u'(-a)$, $u(+a)$, $u'(+a)$, with real or complex coefficients, so restricted as to be regular in the sense of Birkhoff[8]). For fixed R, sufficiently large, we determine a sequence of values of a, say $\{a_n\}$, for which we can evaluate the limit of this integral as a_n becomes infinite with n. We shall show that

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\Gamma} 2\varrho\, G_{a_n}(x, y; \varrho^2)\, d\varrho = \int_{\Gamma} \varphi(x, y; \varrho)\, d\varrho$$

and then study the behavior of the formal integral representations

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, \varphi(x, y; \varrho)\, dy\, d\varrho = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \int_{\Gamma} \varphi(x, y; \varrho)\, d\varrho\, dy, \quad R \to \infty.$$

[8]) Birkhoff, Transactions of the American Mathematical Society 9 (1908), p. 383.

Theorem II. *If Γ is the contour $|\varrho| = R$, $J(\varrho) \geqq 0$, and G_a the Green's function for the regular differential system (2′), then for each value of R sufficiently great there is a sequence of values of a, $\{a_n\}$, such that*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty, \qquad \lim_{n\to\infty} \int_{\Gamma'} 2\varrho\, G_{a_n}(x, y; \varrho^2)\, d\varrho = \int_{\Gamma'} \varphi(x, y; \varrho)\, d\varrho$$

uniformly, $-A \leqq x \leqq A$, $-a_n \leqq y \leqq +a_n$. The function φ has the explicit form

$$\varphi \equiv -2\varrho \{u_1(x)\, u_2(y);\ u_1(y)\, u_2(x)\} / (u_1 u_2' - u_1' u_2),$$

where u_1, u_2 are the functions defined in Theorem I [9]).

By effecting the usual treatment of the function G_a we find that it has the asymptotic form [10]):

$$2\varrho\, G_a = \varphi(x, y; \varrho)$$

$$+ \frac{\begin{vmatrix} e^{\varrho i(x+a)}[1] & e^{\varrho i(a-x)}[1] & 0 \\ i^{k_1}([\alpha_1] + e^{2\varrho i a}[\beta_1]) & (-i)^{k_1}([\alpha_1] e^{2\varrho i a} + [\beta_1]) & e^{\varrho i(a-y)}[\beta_1 i^{k_1+1}] - e^{\varrho i(a+y)}[\alpha_1 (-i)^{k} \\ i^{k_2}([\alpha_2] + e^{2\varrho i a}[\beta_2]) & (-i)^{k_2}([\alpha_2] e^{2\varrho i a} + [\beta_2]) & e^{\varrho i(a-y)}[\beta_2 i^{k_2+1}] - e^{\varrho i(a+y)}[\alpha_2 (-i)^{k_2} \end{vmatrix}}{[\theta_2] + [\theta_0] e^{2\varrho i a} + [\theta_1] e^{4\varrho i a}}$$

where α_1, α_2, β_1, β_2, θ_0, θ_1, θ_2, k_1, k_2 are constants associated with the boundary conditions, and the notation $[c]$ indicates a function of the form $c + \frac{m}{\varrho}$, m being a function of ϱ and other variables such as x, y, a, uniformly bounded $J(\varrho) \geqq 0$, for $|\varrho|$ sufficiently great, $-\infty < x < +\infty$, $-\infty < y < +\infty$, $0 \leqq a < +\infty$.

We shall show that for R sufficiently large we can determine a sequence $\{a_n\}$ so that, when ϱ is on the contour Γ,

$$\left| \frac{1}{[\theta_2] + [\theta_0] e^{2\varrho i a_n} + [\theta_1] e^{4\varrho i a_n}} \right| < \frac{1}{\varepsilon} \qquad (\varepsilon > 0;\ n = 1, 2, 3, \ldots)$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty.$$

To do so we determine those regions of the range $0 \leqq a < \infty$ for which

$$[\theta_2] + [\theta_0] e^{2\varrho i a} + [\theta_1] e^{4\varrho i a} = \Phi, \qquad |\Phi| \leqq \varepsilon.$$

We can write this equation in the form

$$\theta_2 + \theta_0 e^{2\varrho i a} + \theta_1 e^{4\varrho i a} = \eta, \qquad \eta = \Phi + [0],$$

---

[9]) We use the notation $\{A; B\}$ to indicate a function of x and y equal to A when $x > y$, and equal to B when $x < y$. It should be recalled that the function $u_1 u_2' - u_2 u_1'$, the Wronskian of the two functions u_1 and u_2, is a function of ϱ only.

[10]) Birkhoff, loc. cit. footnote [3]), pp. 392–395; Tamarkin, loc. cit. footnote [3]), pp. 363–364.

and can choose R so large that $|\eta| \leqq 2\varepsilon$. The equation becomes

$$2\varrho i a = \log \frac{-\theta_0 \pm \sqrt{\theta_0^2 - 4\theta_1\theta_2 - 4\theta_1\eta}}{2\theta_1}$$

or, since $\theta_1\theta_2 \neq 0$, by the condition of regularity laid down for the system $(2')$,

$$2\varrho i a = \log \xi_{(\pm)} + \zeta_{(\pm)}, \qquad \xi_{(\pm)} = \frac{-\theta_0 \pm \sqrt{\theta_0^2 - 4\theta_1\theta_2}}{2\theta_1}.$$

If ε has been chosen small, ζ_+ and ζ_- are both small, let us say in absolute value less than $2\varepsilon_1$. We determine the logarithm so that $\log 1 = 0$. Our result then gives rise to the inequalities

$$|2\varrho i a - (2n\pi i + \log \xi_{(\pm)})| \leqq 2\varepsilon_1,$$

$$\left| a - e^{-i\theta}\left(\frac{n\pi + \log \xi_{(\pm)}/2i}{R}\right)\right| \leqq \frac{\varepsilon_1}{R}, \qquad \theta = \arg \varrho,$$

for $n = 0, 1, 2, \ldots$. For real values of a these inequalities are satisfied if and only if

$$\left|\frac{n\pi + \log \xi_{(\pm)}/2i}{R}\right| - \frac{\varepsilon_1}{R} \leqq a \leqq \left|\frac{n\pi + \log \xi_{(\pm)}/2i}{R}\right| + \frac{\varepsilon_1}{R}.$$

Clearly this leaves many gaps along the real axis of a, so that it is possible to select a sequence of values $\{a_n\}$ for which no such inequality is true, R being fixed, and for which $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Thus we find

$$2\varrho G_{a_n} - \varphi = e^{\varrho i(a_n + x)} m_1 + e^{\varrho i(a_n - x)} m_2$$

where m_1 and m_2 are functions of x, y, a and ϱ uniformly bounded for ϱ on Γ, all values of a_n, $-\infty < x < +\infty$, $-a_n \leqq y \leqq +a_n$. It is now a simple matter to show that

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Gamma (2\varrho G_{a_n} - \varphi)\, d\varrho = 0$$

uniformly, $-A \leqq x \leqq +A$, $-a_n \leqq y \leqq +a_n$.

Theorem III. *If $f(x)$ is any function absolutely integrable in the sense of Lebesgue on the infinite interval $(-\infty, +\infty)$, then*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-a_n}^{+a_n} f(y) \int_\Gamma 2\varrho G_{a_n}\, d\varrho\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \int_\Gamma \varphi(x, y; \varrho)\, d\varrho\, dy$$

uniformly $-A \leqq x \leqq +A$; and

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \int_\Gamma \varphi\, d\varrho\, dy = \int_\Gamma \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, \varphi\, dy\, d\varrho.$$

It is obvious that the integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \int_{\Gamma} \varphi(x, y; \varrho)\, d\varrho\, dy$ exists. By the preceding theorem we find the result

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-a_n}^{+a_n} f(y) \int_{\Gamma} (2\varrho G_{a_n} - \varphi)\, d\varrho\, dy = 0$$

uniformly $-A \leqq x \leqq +A$; and the first part of the statement follows at once. The last part of the theorem is a simple exercise in the theory of double integrals: since $\varphi = \{-ie^{\varrho i(x-y)}[1];\ -ie^{-\varrho i(x-y)}[1]\}$ is bounded $-\infty < y < +\infty$, for ϱ on Γ, the integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f\varphi\, dy$ is uniformly convergent, and integration with respect to ϱ under the integral sign is permissible.

Theorem IV. *We denote by $\bar{\varphi}$ the function associated with the differential equation $u'' + \varrho^2 u = 0$. Then*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \int_{\Gamma} \bar{\varphi}(x, y; \varrho)\, d\varrho\, dy = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{R} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \cos \varrho (x - y)\, dy\, d\varrho$$

where $f(x)$ is any function summable on $(-\infty, +\infty)$. Also

$$\lim_{R \to \infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \varphi(x, y; \varrho)\, dy\, d\varrho - \frac{1}{\pi} \int_{0}^{R} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \cos \varrho (x - y)\, dy\, d\varrho \right] = 0$$

uniformly $-A \leqq x \leqq +A$; in other words, the integral representation suggested by Theorems II *and* III *is equivalent on $(-A, +A)$ to the well-known Fourier integral representation, for all functions summable on the infinite interval $(-\infty, +\infty)$.*

The function $\bar{\varphi}$ is obtained by substituting $u_1 = e^{\varrho i x}$, $u_2 = e^{-\varrho i x}$ in the general formula of Theorem II and is seen to be

$$\bar{\varphi} = \{-ie^{\varrho i(x-y)};\ -ie^{-\varrho i(x-y)}\}.$$

Thus

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \bar{\varphi}\, d\varrho &= i \int_{-R}^{+R} \{\cos \varrho (x - y) + i \sin \varrho (x - y);\ \cos \varrho (x - y) \\ &\qquad - i \sin \varrho (x - y)\}\, d\varrho \\ &= i \int_{-R}^{+R} \cos \varrho (x - y)\, d\varrho = 2i \int_{0}^{R} \cos \varrho (x - y)\, d\varrho. \end{aligned}$$

The evaluation of the integral $\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} f \int_{\Gamma} \bar{\varphi}\, d\varrho\, dy$ now presents no diffi-

culties. It turns out to be nothing more nor less than the Fourier integral. The second part of the theorem is obtained by showing that

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \int_{\Gamma} [\varphi(x, y; \varrho) - \bar{\varphi}(x, y; \varrho)]\, d\varrho\, dy = 0$$

uniformly $-A \leqq x \leqq +A$, and then using the last part of Theorem III and the first part of this to express the result in definitive form. The actual proof is so closely related to others which we have discussed in great detail that we shall do no more than indicate the procedure. We find readily that

$$\varphi = \{[-i]\, e^{\varrho i(x-y)};\ [-i]\, e^{-\varrho i(x-y)}\},$$
$$\varphi - \bar{\varphi} = \{[\ 0\ ]\, e^{\varrho i(x-y)};\ [\ 0\ ]\, e^{-\varrho i(x-y)}\}.$$

Hence there exists a constant K such that

$$\left| \int_{\Gamma} \varphi - \bar{\varphi}\, d\varrho \right| \leqq K$$

for all Γ of sufficiently large radius. Thus there is a number B such that, given any positive ε however small, we have

$$\left| \left(\int_{-\infty}^{-B} + \int_{+B}^{+\infty} \right) f(y) \int_{\Gamma} (\varphi - \bar{\varphi})\, d\varrho\, dy \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

By the methods of our paper cited in footnote [3]) we show that

$$\left| \int_{-B}^{+B} f(y) \int_{\Gamma} (\varphi - \bar{\varphi})\, d\varrho\, dy \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad R > R',$$

uniformly $-A \leqq x \leqq +A$.[11]) This establishes the second part of the theorem.

The results following upon Theorem IV are immediately obvious; the theorem shows that the properties of the Fourier integral, as regards convergence, divergence, and so forth, can be carried over at once to the more general integral.

The integral over Γ can be modified by a use of Cauchy's integral theorem. As a result of Theorem I it is apparent that φ is a continuous function of ϱ on the domain $J(\varrho) \geqq 0$, $|\varrho| \geqq R'$. If Γ' is the semicircle $|\varrho| = R'$, $0 \leqq \arg \varrho \leqq \pi$, we can write our general integral as

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, \varphi(x, y; \varrho)\, dy\, d\varrho + \frac{1}{2\pi i} \int_{R'}^{R} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, \Phi(x, y; \varrho)\, dy\, d\varrho,$$

$$\Phi(x, y; \varrho) = -\varphi(x, y; \varrho) - \varphi(x, y; -\varrho).$$

---

[11]) Stone, loc. cit. footnote [3]). Compare the proofs of Theorems VII, VIII, IX.

If u_1 and u_2 are analytic for $J(\varrho) \geqq 0$, φ is analytic except for a finite number of poles on the same region. If its complex poles are $\varrho_1, \ldots, \varrho_m$ the integral representation takes the form

$$\sum_{k=1}^{m} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \operatorname*{res}_{\varrho=\varrho_k} \varphi(x, y; \varrho)\, dy + \frac{1}{2\pi i} \int_{0}^{R} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, \Phi(x, y; \varrho)\, dy\, d\varrho\,,$$

when the integrals in the summation exist and when the integral over the segment $(0, R)$ is interpreted to mean the limiting value of an integral taken over a contour in the upper half-plane joining $\varrho = 0$ with $\varrho = R$ and lying in the neighborhood of that segment, as the contour shrinks down upon the segment. If Φ has no real poles the integral over $(0, R)$ in the Riemann integral. If Φ has simple real poles at $\varrho_1', \ldots, \varrho_n'$ and is analytic elsewhere on the real axis, the integral representation becomes

$$\sum_{k=1}^{m} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \operatorname*{res}_{\varrho=\varrho_k} \varphi(x, y; \varrho)\, dy + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=n} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \operatorname*{res}_{\varrho=\varrho_k'} \Phi(x, y; \varrho)\, dy$$
$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{0}^{R} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, \Phi(x, y; \varrho)\, dy\, d\varrho\,,$$

when the integrals in the summations exist and when the integral over $(0, R)$ is taken in the sense of Cauchy.

In case we wish to consider a Cesàro sum of positive order for our general integral, we introduce the expression

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma''} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, \varphi(x, y; \varrho)\, dy\, d\varrho + \frac{1}{2\pi i} \int_{R'}^{R} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \left(1 - \frac{\varrho}{R}\right)^{l} \Phi(x, y; \varrho)\, dy\, d\varrho$$

in which we allow R to become infinite. Since

$$\int_{\Gamma''} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\varphi - \bar{\varphi})\, dy\, d\varrho + \int_{R'}^{R} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\Phi - \bar{\Phi})\, dy\, d\varrho$$

approaches zero uniformly with $\frac{1}{R}$, $-A \leqq x \leqq +A$, it follows by the properties of the Cesàro sum that

$$\int_{\Gamma''} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\varphi - \bar{\varphi})\, dy\, d\varrho + \int_{R'}^{R} \int_{-\infty}^{+\infty} f \left(1 - \frac{\varrho}{R}\right)^{l} (\Phi - \Phi)\, dy\, d\varrho, \qquad l > 0,$$

approaches zero similarly as R becomes infinite. In short, the integral expression above is equivalent to the Cesàro sum of order l of the Fourier

integral, that is, to the expression

$$\frac{1}{\pi}\int_0^R\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\left(1-\frac{\varrho}{R}\right)^l \cos\varrho(x-y)\,dy\,d\varrho.$$

It is interesting to consider the function

$$\bar{u}(x,t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'} e^{-\varrho^2 t}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,\varphi(x,y;\varrho)\,dy\,d\varrho$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{R'}^{\infty} e^{-\varrho^2 t}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,\Phi(x,y;\varrho)\,dy\,d\varrho$$

in connection with the problem of the flow of heat in an infinite bar. A solution of that problem can be obtained from it, as we shall show. We can compute the partial derivatives of $\bar{u}$ with respect to x and t by differentiating under the integral sign when $t>0$. For $\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}$ this process presents no great difficulty since the resulting integral is absolutely and uniformly convergent $t\geqq\varepsilon>0$. The evaluation of $\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}$ in similar fashion is more complicated. We shall proceed, however, to the most difficult, namely $\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial x^2}$. If we write

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=2\varrho\{-u_1''(x)\,u_2(y);\ -u_2''(x)\,u_1(y)\}/(u_1u_2'-u_1'u_2)$$

we find that the integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}dy$ converges absolutely and uniformly $-\infty<x<\infty$, for each value of ϱ, $|\varrho|\geqq R'$, $J(\varrho)\geqq 0$, and is in absolute value less than $K|\varrho|^2$, where K is a constant. Consequently

$$\int_a^x\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\,dy\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\left(\int_a^y\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\,dx+\int_y^x\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\,dx\right)dy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right]_{x=a}\right)dy+2\varrho F(x,a),$$

where

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=2\varrho\{-u_1'(x)\,u_2(y);\ -u_2'(x)\,u_1(y)\}/(u_1u_2'-u_1'u_2),$$

$$F(x,a)=\left\{-\int_a^x f(y)\,dy;\ -\int_a^x f(y)\,dy\right\}=-\int_a^x f(y)\,dy.$$

We multiply this equation by $e^{-\varrho^2 t}$, $t > 0$, and integrate over the path C: $(\infty, R', \Gamma', -R', -\infty)$, thus obtaining

$$\int_C e^{-\varrho^2 t} \int_a^x f(y) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\, dy\, d\varrho = \int_C e^{-\varrho^2 t} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, dy\, d\varrho + 2\pi i A, \quad A = \text{const.},$$

since $\int_C 2\varrho\, e^{-\varrho^2 t}\, d\varrho = 0$. In the integral on the left we can interchange the first two integral signs because, in view of the fact that $\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\, dy \right| < K|\varrho|^2$, the integral $\int_C e^{-\varrho^2 t} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\, dy\, d\varrho$ converges absolutely and uniformly, $t \geqq \varepsilon > 0$, $-\infty < x < +\infty$. Thus we have

$$\frac{1}{2\pi i} \int_a^x \int_C e^{-\varrho^2 t} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\, dy\, d\varrho\, dx = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + A.$$

By differentiation with respect to x we find

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{-\varrho^2 t} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\, dy\, d\varrho$$

almost everywhere, $-\infty < x < +\infty$. We conclude immediately that $\bar{u}(x, t)$ satisfies the partial differential equation

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + g(x)\, \bar{u} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}.$$

By applying to x and $\bar{u}$ the inverse of the Liouville transformation employed to take equation (1) into equation (2), we obtain a function $u(x, t)$, of the new independent variable x and the same variable t, which is a solution of the equation

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x) \frac{\partial u}{\partial x}\right) = c(x)\, d(x) \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Furthermore, we have $\lim_{t \to 0} \bar{u}(x, t) = f(x)$ almost everywhere, $-\infty < x < +\infty$; and if $f(x)$ is continuous, $\lim_{t \to 0} \bar{u}(x, t) = f(x)$ uniformly, $-A \leqq x \leqq +A$. The proof of these facts depends upon a theorem of Hardy which enables us to deduce them from the corresponding facts concerning Cesàro summability[12]). We know that

$$\lim_{R \to \infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \left(1 - \frac{\varrho}{R}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, \varphi\, dy\, d\varrho + \frac{1}{2\pi i} \int_{R'}^{R} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \left(1 - \frac{\varrho}{R}\right) \Phi\, dy\, d\varrho \right] = f(x$$

[12]) Hardy, loc. cit. footnote [2]), p. 431; Hobson, loc. cit. footnote [2]), § 266.

almost everywhere, $-\infty < x < +\infty$, the convergence being uniform, $-A \leqq x \leqq +A$, when $f(x)$ is continuous. We show that

$$\lim_{R\to\infty} \frac{e^{-R^2 t}}{2\pi i}\left[\int_{\Gamma'}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,\varphi\,dy\,d\varrho + \int_{R'}^{R}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,\Phi\,dy\,d\varrho\right] = 0, \qquad t > 0,$$

uniformly $-\infty < x < +\infty$. In fact, the term in brackets is in absolute value less than $K_1 + RK_2$, where K_1 and K_2 are constants. From this the desired result can be established by Hardy's theorem. Consequently, the related function $u(x,t)$ converges in a similar fashion, when $t \to 0$, to a function $F(x)$, related to f in the same manner as u is related to $\bar{u}$. Thus, if $F(x)$ is given arbitrarily, except for the condition concerning the absolute integrability of the related function f, the function $u(x,t)$ satisfies the requirements for the temperature function in an infinite bar with initial temperature $F(x)$.

§ 2.

The Problem of the Semi-infinite Bar.

The preliminary discussion of the differential equation of the flow of heat given in § 1 is modified only in the restriction of the variable x to the range $(0, \infty)$. In addition to satisfying the differential equation the temperature function $U(x,t)$ must have a prescribed behavior at $x = 0$. We shall assume that this boundary condition takes one of the forms

$$U(0,t) = 0; \qquad \left[\frac{\partial U}{\partial x} - Hu\right]_{x=0} = 0, \qquad H \geqq 0.$$

The first condition prescribes the temperature, the second the conditions of radiation at the end of the bar. Finally, the temperature at $t = 0$ is supposed given.

By carrying out the reductions described in § 1, the study of this problem is reduced to that of the equation

$$u'' + (\varrho^2 + g)\,u = 0 \qquad (0 \leqq x < +\infty), \tag{3}$$

with one of the boundary conditions $u(0) = 0$, $u'(0) - Hu(0) = 0$, adjoined. We shall suppose that g is absolutely integrable in the sense of Lebesgue, as in the preceding section.

It is obvious that Theorem I can be extended to cover equation (3). We require for later developments a somewhat more precise knowledge of solutions of (3) for large values of x. We state the results in the following theorem.

Theorem V. *There exist two linearly independent solutions of the differential equation* (3), u_1 *and* u_2, *which have precisely the same pro-*

perties as the functions described in Theorem I, *except that the variables* x *and* y *are restricted to the range* $(0, \infty)$. *Furthermore, for* $J(\varrho) > 0$,

$$u_1(0, \varrho) = \zeta_1(\varrho), \qquad u_2(0, \varrho) = 1,$$
$$\lim_{x \to \infty} e^{-\varrho i x} u_1(x, \varrho) = 1, \qquad \lim_{x \to \infty} e^{\varrho i x} u_2(x, \varrho) = \zeta_2(\varrho),$$

$$u_1'(0, \varrho) = \zeta_1'(\varrho), \qquad u_2'(0, \varrho) = -\varrho i,$$
$$\lim_{x \to \infty} e^{-\varrho i x} u_1'(x, \varrho) = \varrho i, \qquad \lim_{x \to \infty} e^{\varrho i x} u_2'(x, \varrho) = \zeta_2'(\varrho),$$

where the functions ζ *are defined,* $J(\varrho) \geqq 0$, *and have the same analytic character as* u_1 *and* u_2. *The convergence of the four limits is bounded,* $J(\varrho) > 0$. *These functions have the asymptotic expressions*

$$\zeta_1(\varrho) = [1], \quad \zeta_1'(\varrho) = [\varrho i], \quad \zeta_2(\varrho) = [1], \quad \zeta_2'(\varrho) = [-\varrho i]$$

when $J(\varrho) \geqq 0$.

The existence and properties of the functions u_1 and u_2 are deduced from the integral equations

$$u_1(x) = e^{\varrho i x} - \frac{1}{\varrho} \int_{\infty}^{x} \sin \varrho (x - y)\, g(y)\, u_1(y)\, dy,$$

$$u_2(x) = e^{-\varrho i x} - \frac{1}{\varrho} \int_{0}^{x} \sin \varrho (x - y)\, g(y)\, u_2(y)\, dy.$$

The procedure is like that of the first theorem. The remarks concerning the behavior of these functions at $x = 0$ and at $x = \infty$ are readily verified from the integral equations themselves.

We now turn to the main problem of this section. We shall consider the semi-infinite bar as the limit of a finite bar with end-points $x = 0$, $x = a$. If $f(x)$ is absolutely integrable on $(0, \infty)$ and if G_a is the Green's function for the regular differential system[8])

$$(3') \qquad u'' + (\varrho^2 + g)\, u = 0,$$
$$W_1(u) = 0, \qquad W_2(u) = 0,$$

with boundary conditions affecting the points $x = 0$, $x = a$, we form the expression

$$\frac{1}{2\pi i} \int_0^a f(y) \int_\Gamma 2\varrho\, G_a(x, y; \varrho^2)\, d\varrho\, dy$$

and investigate its behavior as a becomes infinite. The contour Γ is the same as that used in § 1.

Theorem VI. *For each value of R sufficiently great there is a sequence of values of a, $\{a_n\}$, such that*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty} \int_\Gamma 2\varrho\, G_{a_n}(x,y;\varrho^2)\, d\varrho = \int_\Gamma \psi(x,y;\varrho)\, d\varrho,$$

$0 \leqq x \leqq A$, $0 \leqq y < \infty$. *The function ψ has the explicit form*

$$\psi \equiv -2\varrho\{u_1(x)\,u_2(y);\ u_2(x)\,u_1(y)\}/(u_1u_2' - u_1'u_2) + \Xi(\varrho)\,u_1(x)\,u_1(y)$$

where $\Xi(\varrho)$ is an analytic function of ϱ, $J(\varrho) > 0$, continuous $J(\varrho) \geqq 0$, $|\varrho|$ sufficiently large, whose character will be described in detail below. The convergence of the expression $\int_\Gamma 2\varrho\, G_{a_n} - \psi\, d\varrho$ to its limiting value zero is uniform in x and y, $0 \leqq x \leqq A$, $0 \leqq y \leqq B$, and bounded, $0 \leqq x \leqq A$, $0 \leqq y \leqq a_n$.

The proof of this theorem is entirely analogous to that of Theorem II. From the formula[10])

$$2\varrho\, G_a = \varphi(x,y;\varrho)$$

$$+ \frac{\begin{vmatrix} e^{\varrho i x}[1] & e^{\varrho i(a-x)}[1] & 0 \\ i^{k_1}([\alpha_1]+e^{\varrho i a}[\beta_1]) & (-i)^{k_1}([\alpha_1]e^{\varrho i a}+[\beta_1]) & e^{\varrho i(a-y)}[\beta_1 i^{k_1+1}] - e^{\varrho i y}[\alpha_1(-i)^{k_1+1}] \\ i^{k_2}([\alpha_2]+e^{\varrho i a}[\beta_2]) & (-i)^{k_2}([\alpha_2]e^{\varrho i a}+[\beta_2]) & e^{\varrho i(a-y)}[\beta_2 i^{k_2+1}] - e^{\varrho i y}[\alpha_2(-i)^{k_2+1}] \end{vmatrix}}{[\theta_2]+[\theta_0]e^{\varrho i a}+[\theta_1]e^{2\varrho i a}}$$

we proceed to set up the sequence $\{a_n\}$ just as we did in the previous theorem. We notice that for fixed R, $2\varrho\, G_{a_n}$ is uniformly bounded, $0 \leqq x \leqq A$, $0 \leqq y \leqq a_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. On allowing a_n to become infinite we find

$$\lim_{n\to\infty} 2\varrho\, G_{a_n} = \varphi(x,y;\varrho) + \left[\frac{(-i)^{k_1+k_2+1}(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)}{\theta_2}\right] e^{\varrho i(x+y)}$$

uniformly, $0 \leqq x \leqq A$, $0 \leqq y \leqq B$, $0 < \varepsilon \leqq \arg\varrho \leqq \pi - \varepsilon$. The last term, as we shall see presently, can be written as

$$\Xi(\varrho)\,u_1(x)\,u_2(y), \qquad \Xi(\varrho) = \left[\frac{(-i)^{k_1+k_2+1}(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)}{\theta_2}\right].$$

It follows that $\lim_{n\to\infty} \int_\Gamma 2\varrho\, G_{a_n} - \psi\, d\varrho = 0$, after the manner described in the statement of the theorem.

To determine the precise nature of the function Ξ we notice that[10])

$$\Xi(\varrho)u_1(x)u_2(y) = \lim_{n\to\infty} \frac{\begin{vmatrix} u_1(x) & e^{\varrho i a_n}u_2(x) & 0 \\ W_1(u_1) & e^{\varrho i a_n}W_1(u_2) & -2\varrho\, W_{1a_n}(u_1)\,u_2(y) - 2\varrho\, W_{10}(u_2)\,u_1(y) \\ W_2(u_1) & e^{\varrho i a_n}W_2(u_2) & -2\varrho\, W_{2a_n}(u_1)\,u_2(y) - 2\varrho\, W_{20}(u_2)\,u_1(y) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} W_1(u_1) & e^{\varrho i a_n}W_1(u_2) \\ W_2(u_1) & e^{\varrho i a_n}W_2(u_2) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_1(y)\,u_2(y) \\ u_1'(y)\,u_2'(y) \end{vmatrix}}$$

where W_{j0}, W_{ja_n} are the parts of W_j involving $x=0$, $x=a_n$, respectively. We write

$$\lim_{n\to\infty} W_{ja_n}(u_1)=0, \qquad \lim_{n\to\infty} e^{\varrho i a_n} W_j(u_2)=\delta_j(\varrho), \qquad (j=1,2),$$

when $J(\varrho)>0$. The functions δ_1, δ_2 are linear combinations of the functions ζ_2, ζ_2' described in Theorem V. Thus, for Ξ we find

$$\Xi(\varrho)=2\varrho\frac{\begin{vmatrix} W_{10}(u_2) & \delta_1 \\ W_{20}(u_2) & \delta_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} W_{10}(u_1) & \delta_1 \\ W_{20}(u_1) & \delta_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix}}.$$

This expression is especially interesting when only one of the boundary conditions, say $W_1(u)$, involves the point $x=0$; we find, since $W_{20}(u)$ is identically zero,

$$\Xi(\varrho)=2\varrho\, W_{10}(u_2)\,/\,W_{10}(u_1)\,(u_1u_2'-u_1'u_2).$$

Consequently, if we apply $W_{10}(u)$ to $\psi(x,y;\varrho)$ considered as a function of x, we show that

$$W_{10}(\psi)=-2\varrho W_{10}(u_2)u_1(y)/(u_1u_2'-u_1'u_2)+2\varrho W_{10}(u_2)u_1(y)/(u_1u_2'-u_1'u_2)$$
$$=0.$$

Theorem VII. *If $f(x)$ is any function absolutely integrable in the sense of Lebesgue on the infinite interval $(0,\infty)$, then*

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{a_n} f(y)\int_\Gamma 2\varrho\, G_{a_n}\,d\varrho\,dy=\int_0^\infty f(y)\int_\Gamma \psi(x,y;\varrho)\,d\varrho\,dy$$

uniformly, $0\leqq x\leqq A$; and

$$\int_0^\infty f(y)\int_\Gamma \psi\,d\varrho\,dy=\int_\Gamma\int_0^\infty f(y)\,\psi\,dy\,d\varrho.$$

We have

$$\Big|\int_0^{a_n} f\int_\Gamma 2G_{a_n}-\psi\,d\varrho\,dy\Big|\leqq\Big|\int_0^B f\int_\Gamma 2\varrho G_{a_n}-\psi\,d\varrho dy\Big|+\Big|\int_B^{a_n} f\int_\Gamma 2\varrho G_{a_n}-\psi\,d\varrho dy\Big|$$
$$\leqq\Big|\int_0^B f\int_\Gamma 2\varrho\,G_{a_n}-\psi\,d\varrho\,dy\Big|+M\int_B^\infty|f|\,dy<\varepsilon,$$

$0\leqq x\leqq A$, $n\geqq N$, if B and then N are suitably determined. This proves the first part of the theorem. The remainder is easily verified.

Theorem VIII. *If $f(x)$ is summable on $(0,\infty)$, then*

$$\lim_{R\to\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\int_0^R f(y)\psi(x,y;\varrho)\,dy\,d\varrho-\frac{1}{\pi}\int_0^R\int_0^\infty f(y)\cos\varrho(x-y)\,dy\,d\varrho\right]=0$$

uniformly, $0 < \varepsilon \leqq x \leqq A$. *In other words, the integral representation suggested by Theorems* VI *and* VII *is equivalent on* (ε, A) *to the Fourier integral representation, for all functions summable on the infinite interval* $(0, \infty)$.

By comparison with Theorem IV it will be seen that the theorem is established as soon as we can prove that

$$\lim_{R\to\infty} \int_\Gamma \int_0^\infty f(y)\, \Xi(\varrho)\, u_1(x)\, u_1(y)\, dy\, d\varrho = 0$$

uniformly, $\varepsilon \leqq x \leqq A$. This is done by following the methods of Theorem IV and the reference given in footnote [11]).

Theorem IV. *If* $f(x)$ *is summable on* $(0, \infty)$, *then*

$$\lim_{R\to\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \int_0^\infty f(y)\, \psi(x, y; \varrho)\, dy\, d\varrho - \left(\frac{1-\Theta}{2}\right) I_1(R) - \left(\frac{1+\Theta}{2}\right) I_2(R) \right] = 0$$

uniformly, $0 \leqq x \leqq A$, *where* I_1 *and* I_2 *are the Fourier cosine and sine integrals respectively*:

$$I_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^R \int_0^\infty f(y) \cos \varrho x \cos \varrho y\, dy\, d\varrho,$$

$$I_2 = \frac{2}{\pi} \int_0^R \int_0^\infty f(y) \sin \varrho x \sin \varrho y\, dy\, d\varrho;$$

and Θ *is a constant*:

$$\Theta i = (-i)^{k_1+k_2+1}(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)/\theta_2$$
$$= (-i)^{k_1+k_2+1}(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) \Big/ \begin{vmatrix} \alpha_1 i^{k_1} \beta_1 (-i)^{k_1} \\ \alpha_2 i^{k_2} \beta_2 (-i)^{k_2} \end{vmatrix}.$$

In particular, if only one of the two boundary conditions in the differential system $(3')$ *involves the point* $x = 0$, *say the condition* W_1, *then* $\Theta = (-1)^{k_1+1}$, *where* k_1 *is one or zero according as* $u'(0)$ *does or does not occur in* $W_1(u)$.

We have

$$\psi(x, y; \varrho) - \{-i e^{\varrho i(x-y)}; -i e^{-\varrho i(x-y)}\} - \Theta i e^{\varrho i(x+y)}$$
$$= \{e^{\varrho i(x-y)}[0]; e^{-\varrho i(x-y)}[0]\} - e^{\varrho i(x+y)}[0].$$

$$\lim_{R\to\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \int_0^\infty f(y)\, \psi(x, y; \varrho)\, dy\, d\varrho \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \int_0^\infty (\{-i e^{\varrho i(x-y)}; -i e^{-\varrho i(x-y)}\} + \Theta i e^{\varrho i(x+y)})\, dy\, d\varrho \right] = 0$$

uniformly, $0 \leqq x \leqq A$, by methods which we have discussed in detail elsewhere[13]). The second integral in this difference is readily reduced to the form given in the statement of the theorem, by proceeding as we did in Theorem IV in a similar situation.

If W_2 in the differential system $(3')$ does not involve the point $x = 0$, then $\alpha_2 = 0$, $\Theta = (-1)^{k_1+1}$, where k_1 is the order of the highest derivative of u, taken at $x = 0$, which appears in W_1:

$$W_1(u) \equiv \alpha_1 u^{(k_1)}(0) + \beta_1 u^{(k_1)}(a) + \ldots \qquad (k_1 = 0 \text{ or } 1).$$

From this point on we can repeat almost verbatim the closing paragraphs of the preceding section concerning the integral representation and its application to the solution of the problem of heat-flow. It is unnecessary to give the details, but we may comment on the matter of boundary conditions, which were unimportant there but are significant here. The most interesting case is that in which our integral representation is to be obtained by starting from the system

$$u'' + (\varrho^2 + g)u = 0, \quad W_{10}(u) = 0 \qquad (0 \leqq x < +\infty).$$

The preceding work makes it plain that we reach the desired result by taking $W_1 \equiv W_{10}$, $W_2 \equiv W_{2a}$ in $(3')$ and passing to the limit. In fact, if $\bar{u}(x, t)$ is the function analogous to that described at the end of § 1, we can show that $\bar{u}$ has, in addition to the properties proved in the preceding case, the property that $W_{10}\bar{u}(x, t) = 0$. The way to the solution of the problem of the semi-infinite bar is now clear.

§ 3.

Hankel's Integral Representation.

Hankel defined a double integral involving Bessel functions entirely analogous to the Fourier integral[14]). It seems plausible that this integral can be derived from series of Bessel functions on an interval $(0, a)$ by allowing a to become infinite. In fact, these series can be considered by methods differing very little from those used in the papers cited in footnote [3]); the essential formulae can be obtained by modifying those of a recent paper of the writer[15]). Instead of justifying this limiting process, we shall write down an integral analogous to those of the preceding sections and to some appearing in the article just cited. We

[13]) Stone, loc. cit. footnote [3]). Compare Theorems XV, XVI, XVII.

[14]) For a thorough discussion of Hankel's integral, see Watson, Theory of Bessel Functions, Cambridge 1922, chapter 14. Hankel's original memoir is found in the Math. Annalen **8** (1875), pp. 476—483.

[15]) Stone, Annals of Mathematics, series 2, **28** (1927), pp. 271—290.

shall then show that we have merely a new form of Hankel's integral. We denote by γ_1 and γ_4 the arcs $|\varrho| = R$, $0 \leqq \arg \varrho \leqq \frac{\pi}{2}$, and $|\varrho| = R$, $-\frac{\pi}{2} \leqq \arg \varrho \leqq 0$, respectively. We show that

$$\sqrt{x} \int_0^R \int_0^\infty \varrho\, y f(y) J_\nu(\varrho x)\, J_\nu(\varrho y)\, dy\, d\varrho = \int_{\gamma_1+\gamma_4} \int_0^\infty \sqrt{y} f(y) \varphi_\nu(x, y; \varrho)\, dy\, d\varrho$$

where $\sqrt{y} f(y)$ is summable on $(0, \infty)$, $\nu > -\frac{1}{2}$, and

$$\varphi_\nu(x, y; \varrho) = \frac{-\varrho \sqrt{xy}}{2} \left\{ H_\nu^{(1)}(\varrho x) J_\nu(\varrho y);\quad H_\nu^{(1)}(\varrho y) J_\nu(\varrho x) \right\} \qquad (0 \leqq \arg \varrho < \pi),$$

$$= \frac{+\varrho \sqrt{xy}}{2} \left\{ H_\nu^{(2)}(\varrho x) J_\nu(\varrho y);\quad H_\nu^{(2)}(\varrho y) J_\nu(\varrho x) \right\} \qquad (-\pi \leqq \arg \varrho < 0).$$

The notation employed for Bessel functions of various kinds is that of Watson's treatise[14]). We may note that the integration over $\gamma_1 + \gamma_4$ may be replaced by integration over the arc Γ of the preceding sections, since, by the equations[16])

$$H_\nu^{(1)}(e^{\pi i} z) = -e^{-\nu \pi i} H_\nu^{(2)}(z), \qquad J_\nu(e^{\pi i} z) = e^{\nu \pi i} J_\nu(z),$$

it is true that

$$\varphi_\nu(x, y; e^{\pi i} \varrho) = -\varphi_\nu(x, y; \varrho).$$

Because of the fact that asymptotic forms for Bessel functions are most easily handled in the region $-\frac{\pi}{2} \leqq \arg \varrho \leqq +\frac{\pi}{2}$ we prefer the new contour.

We first prove that

$$\int_{\gamma_1+\gamma_4} \varphi_\nu\, d\varrho = \int_0^R \sqrt{xy}\, \varrho\, J_\nu(\varrho x)\, J_\nu(\varrho y)\, d\varrho.$$

Let us consider the integral over γ_1. For each pair of values of x and y, $0 < a \leqq x < +\infty$, $0 \leqq y < +\infty$, φ_ν is an analytic function of ϱ, $0 \leqq \arg \varrho \leqq \frac{\pi}{2}$, $\varrho \neq 0$; at $\varrho = 0$, φ_ν has the form

$$\varphi_\nu = \frac{-\varrho \sqrt{xy}}{2} \left\{ \varrho^{2\nu} x^\nu y^\nu \omega_1 + x^{-\nu} y^\nu \omega_2;\ \varrho^{2\nu} y^\nu x^\nu \omega_3 + y^{-\nu} x^\nu \omega_4 \right\} \quad \left(\nu \geqq -\frac{1}{2}\right),$$

where $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ are entire functions in x, y and ϱ; consequently φ_ν is continuous in the sector described. By Cauchy's integral theorem we find

$$\int_{\gamma_1} \varphi_\nu\, d\varrho = \int_0^{Ri} \varphi_\nu\, d\varrho + \frac{1}{2} \int_0^R \sqrt{xy}\, \varrho \left\{ H_\nu^{(1)}(\varrho x) J_\nu(\varrho y);\ H_\nu^{(1)}(\varrho y) J_\nu(\varrho x) \right\} d\varrho.$$

[16]) Watson, loc. cit. footnote [14]), § 3. 62.

By similar arguments

$$\int_{\gamma_4} \varphi_\nu \, d\varrho = \int_{-Ri}^{0} \varphi_\nu \, d\varrho + \tfrac{1}{2} \int_0^R \sqrt{xy}\, \varrho \left\{ H_\nu^{(2)}(\varrho x) J_\nu(\varrho y);\ H_\nu^{(2)}(\varrho y) J_\nu(\varrho x) \right\} d\varrho .$$

On adding we find

$$\int_{\gamma_1+\gamma_4} \varphi_\nu \, d\varrho = \int_0^R \sqrt{xy}\, \varrho\, J_\nu(\varrho x) J_\nu(\varrho y)\, d\varrho ,$$

by recalling the equations

$$\varphi_\nu(x, y;\ e^{\pi i}\varrho) = -\varphi_\nu(x, y; \varrho), \quad J_\nu = \frac{1}{2}(H_\nu^{(1)} + H_\nu^{(2)}).$$

This result is true for each pair of values of x, y on the range considered.

Next, the following changes of order of integration must be justified:

$$\int_0^\infty \sqrt{y} f(y) \int_{\gamma_1+\gamma_4} \varphi_\nu \, d\varrho \, dy = \int_{\gamma_1+\gamma_4} \int_0^\infty \sqrt{y} f(y) \varphi_\nu \, dy \, d\varrho,$$

$$\int_0^\infty \sqrt{y}\, f(y) \int_0^R \sqrt{xy}\, J_\nu(\varrho x) J_\nu(\varrho y)\, d\varrho \, dy$$

$$= \int_0^R \int_0^\infty y f(y) \varrho \sqrt{x} J_\nu(\varrho x) J_\nu(\varrho y)\, dy \, d\varrho$$

for all values of x; $0 < a \leqq x \leqq b < +\infty$. The second is discussed at length by Watson[14]). The first is essentially like the corresponding cases in § 1 and § 2. In fact, by using the asymptotic expansions for Bessel functions[17]) we obtain the results

$$\varphi_\nu = e^{\varrho i(x-y)} \Omega_\nu^{(1)}(\varrho y)[1], \quad a \leqq x \leqq b, \quad 0 \leqq y \leqq a, \quad 0 \leqq \arg \varrho \leqq \frac{\pi}{2}$$

$$\varphi_\nu = e^{-\varrho i(x-y)} \Omega_\nu^{(2)}(\varrho y)[1], \quad a \leqq x \leqq b, \quad 0 \leqq y \leqq a, \quad -\frac{\pi}{2} \leqq \arg \varrho < 0$$

where $\Omega_\nu^{(1)}$, $\Omega_\nu^{(2)}$ are uniformly bounded; and

$$\varphi_\nu = \Big\{ -\frac{1}{2\pi} \Big(e^{\varrho i(x-y)}[1] + e^{i(\varrho x + \varrho y - \nu\pi - \frac{1}{2}\pi)}[1] \Big);$$

$$- \frac{1}{2\pi} \Big(e^{-\varrho i(x-y)}[1] + e^{i(\varrho x + \varrho y - \nu\pi - \frac{1}{2}\pi)} \Big) \Big\},$$

$$a \leqq x \leqq b, \quad 0 < a - \varepsilon \leqq y < +\infty, \quad 0 \leqq \arg \varrho \leqq \frac{\pi}{2};$$

$$\varphi_\nu = \Big\{ \frac{1}{2\pi} \Big(e^{-\varrho i(x-y)}[1] + e^{-i(\varrho x + \varrho y - \nu\pi - \frac{1}{2}\pi)}[1] \Big);$$

$$\frac{1}{2\pi} \Big(e^{\varrho i(x-y)}[1] + e^{i(\varrho x + \varrho y - \nu\pi - \frac{1}{2}\pi)}[1] \Big) \Big\};$$

$$a \leqq x \leqq b, \quad 0 < a - \varepsilon \leqq y < +\infty, \quad -\frac{\pi}{2} \leqq \arg \varrho < 0.$$

[17]) Watson, loc. cit., see footnote [14]), § 3. 13 (1), § 7. 21 (1), § 7. 2 (3), § 7. 2 (4).

As a consequence of these asymptotic formulae we see that $\int_0^\infty \sqrt{y}\, f(y)\, \varphi_\nu\, dy$ is a uniformly convergent infinite integral, $|\varrho| = R$, $-\frac{\pi}{2} \leqq \arg \varrho \leqq +\frac{\pi}{2}$; the validity of integrating under the integral sign is easily established from this fact.

Having expressed Hankel's integral in this form, we state the leading theorem concerning it.

Theorem X. *If* $\sqrt{x} f(x)$ *is summable on the infinite interval* $(0, \infty)$, *then*

$$\lim_{R \to \infty} \Big[\int_0^R \int_0^\infty \sqrt{y} f(y) \sqrt{xy}\, \varrho J_\nu(\varrho x) J_\nu(\varrho y)\, dy\, d\varrho - \frac{1}{\pi} \int_0^R \int_0^\infty \sqrt{y} f(y) \cos \varrho (x-y)\, dy\, d\varrho \Big] = 0$$

uniformly, $0 < A \leqq x \leqq B < \infty$. *In other words, on any such interval Hankel's integral*

$$\int_0^R \int_0^\infty y f(y) \varrho J_\nu(\varrho x) J_\nu(\varrho y)\, dy\, d\varrho, \qquad \nu \geqq -\frac{1}{2},$$

is equivalent to the Fourier integral $\frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^R \int_0^\infty \sqrt{y} f(y) \cos \varrho (x-y)\, dy\, d\varrho$.

The proof consists in defining the function

$$\bar{\varphi}(x, y; \varrho) = -\frac{1}{2\pi} \{e^{\varrho i(x-y)};\ e^{-\varrho i(x-y)}\}, \qquad 0 \leqq \arg \varrho \leqq \frac{\pi}{2},$$

$$= +\frac{1}{2\pi} \{e^{-\varrho i(x-y)};\ e^{\varrho i(x-y)}\}, \qquad -\frac{\pi}{2} \leqq \arg \varrho < 0,$$

for which $\int_{\gamma_1+\gamma_4} \bar{\varphi}\, d\varrho = \frac{1}{\pi} \int_0^R \cos \varrho (x-y)\, d\varrho$ and then showing that

$$\lim_{R \to \infty} \int_0^\infty \sqrt{y} f(y) \int_{\gamma_1+\gamma_4} (\varphi_\nu - \bar{\varphi})\, d\varrho\, dy = 0$$

uniformly $0 < A \leqq x \leqq B < \infty$. The proof, in short, is exactly like those we have already outlined in the corresponding theorems of § 1 and § 2.

By the asymptotic forms written out above, we find that for all R sufficiently great, there exists a constant K such that

$$\Big| \int_{\gamma_1+\gamma_4} \varphi_\nu - \bar{\varphi}\, d\varrho \Big| < K, \quad 0 < A \leqq x \leqq B, \quad 0 < A - \varepsilon \leqq y < \infty.$$

We can choose $C > B$ so large that

$$\left| \int_C^\infty \sqrt{y} f(y) \int_{\gamma_1+\gamma_4} (\varphi_\varrho - \overline{\varphi}) d\varrho \, dy \right| < \frac{\eta}{2}.$$

We then refer the reader to our paper on Bessel series[15]), where full details concerning the further discussion of the integral $\int_0^C \sqrt{y} f(y) \int_{\gamma_1+\gamma_4} (\varphi_\varrho - \overline{\varphi}) d\varrho \, dy$ are given in Theorem III. Attention should be called to the fact that this integral appears there only in the case $C = 1$; but the restriction is due to the fact that other integrals are involved as well and that for these the restriction is essential. Thus for all R sufficiently large

$$\left| \int_0^C \sqrt{y} f(y) \int_{\gamma_1+\gamma_4} (\varphi_\varrho - \overline{\varphi}) d\varrho \, dy \right| < \frac{\eta}{2},$$

uniformly $0 < A \leqq x \leqq B < \infty$. The remainder of the proof is readily supplied.

(Eingegangen am 25. April 1927.)

Untersuchungen über die arithmetischen Eigenschaften von Gruppen linearer Substitutionen[1].

(Erste Mitteilung.)

Von

Richard Brauer in Königsberg i. Pr.

In der arithmetischen Theorie der Gruppen linearer Substitutionen handelt es sich hauptsächlich um die Frage, in welchen algebraischen Körpern über einem gegebenen Grundkörper K eine vorgegebene Gruppe $\mathfrak{H}$ von linearen Substitutionen rational darstellbar ist[2]. Bei der Untersuchung dieses Problems tritt ein gewisses System von endlich vielen Zahlen, das Faktorensystem der Gruppe[3], auf; dieses System soll im folgenden eingehender untersucht werden. Es wird sich zeigen, daß die arithmetischen Eigenschaften der Gruppen allein durch ihr Faktorensystem vollständig bestimmt sind.

Zunächst wird der Exponent des Faktorensystems auf eine neue Weise definiert und gezeigt, daß der Schursche Index m einer irreduziblen Gruppe durch das Faktorensystem bestimmt ist. Im § 2 werden dann die not-

[1]) Diese Arbeit stimmt, abgesehen vom § 4, im wesentlichen mit dem ersten Teil meiner Habilitationsschrift überein, die der Philosophischen Fakultät der Universität Königsberg im Wintersemester 1926/27 vorgelegen hat.

[2]) Grundlegend für diese Fragen sind die beiden Arbeiten von Herrn I. Schur in den Sitzungsberichten der Berliner Akademie (1906), S. 164—184, und in den Transactions of the American Math. Soc. **15** (1909), S. 159—175. — Ferner nenne ich: A. Speiser, Zahlentheoretische Sätze aus der Gruppentheorie, Math. Zeitschr. 5 (1919), S. 1—6; I. Schur, Bemerkungen zu der vorstehenden Arbeit des Herrn Speiser, ebendort S. 7—10; R. Brauer, Über Zusammenhänge von arithmetischen und invariantentheoretischen Eigenschaften von Gruppen, Sitzungsberichte der Berliner Akademie (1926), S. 410—416. Ich zitiere diese Arbeiten in der eben genannten Reihenfolge mit Sch 1, Sch 2, Sp, Sch 3 und B.

[3]) Vgl. dazu Sch 3, S. 8, und B, S. 412.

wendigen und hinreichenden Bedingungen dafür aufgestellt, daß ein System von Zahlen als Faktorensystem einer Gruppe auftritt. Sind diese Bedingungen erfüllt, so gehört zu dem System ein bestimmter Schurscher Index m; dann und nur dann gibt es irreduzible Gruppen f-ten Grades mit diesem gegebenen Faktorensystem, wenn f durch m teilbar ist. Unter allen derartigen Gruppen gibt es bei festem f eine größte Gruppe $\mathfrak{H}$, in dem Sinn, daß jede andere solche Gruppe einer Untergruppe von $\mathfrak{H}$ ähnlich ist.

Unter Verwendung dieser Betrachtungen gelingt es leicht, mit Hilfe des Faktorensystems die charakteristischen Gleichungen aller mit einer gewissen Gruppe $\mathfrak{H}^*$ vertauschbaren in K rationalen Matrizen aufzustellen; dabei ist $\mathfrak{H}^*$ in K rational und enthält als irreduzible Bestandteile nur $\mathfrak{H}$ und die algebraisch bezüglich K zu $\mathfrak{H}$ konjugierten Gruppen. Die Bedeutung dieser Gleichungen für unsere Fragestellung ergibt sich aus der Schurschen Theorie (vgl. Sch 1 und Sch 2); hat z. B. eine dieser Gleichungen α als genau f-fache Wurzel — die Vielfachheit jeder Wurzel ist durch f teilbar — und enthält K den Charakter von $\mathfrak{H}$, so ist $\mathfrak{H}$ in $\mathsf{K}(\alpha)$ rational darstellbar; die Körper kleinsten Grades über K, in denen $\mathfrak{H}$ darstellbar ist, kann man sämtlich als solche Körper $\mathsf{K}(\alpha)$ erhalten.

Es erscheint zweckmäßig, den von Herrn I. Schur in Sch 3 eingeführten Begriff der assoziierten Faktorensysteme noch zu erweitern, dann ist einer Klasse von ähnlichen Gruppen eindeutig eine Schar assoziierter Faktorensysteme zugeordnet; daher gelten assoziierte Faktorensysteme als nicht wesentlich verschieden. Ist insbesondere ein zu einem Faktorensystem assoziiertes bekannt, das zu einer Darstellung der Gruppe in einem Körper von möglichst niedrigem Grad gehört, so kann man die zu diesem Faktorensystem gehörigen größten Gruppen explizit angeben. Mit Hilfe dieses assoziierten Faktorensystems ist es dann möglich, anzugeben, in welcher Weise die (für $m \neq 1$ nicht vermeidbaren) Irrationalitäten in bezug auf K bei passender Wahl der Variablen in $\mathfrak{H}$ auftreten.

Im § 4 untersuche ich schließlich, wie man bei gegebenem Grundkörper alle Faktorensysteme aufstellen kann, wie man ferner entscheiden kann, ob zwei Faktorensysteme assoziiert sind. Es zeigt sich, daß diese Frage eng mit der algebraischen Struktur gewisser vorkommender Körper zusammenhängt. Ist K ein algebraischer Zahlkörper, so kann man die Entscheidung mit idealtheoretischen Hilfsmitteln treffen.

Die hier abgeleiteten Resultate stehen in engem Zusammenhang mit Sätzen aus der Theorie der hyperkomplexen Zahlen; darauf werde ich an anderer Stelle eingehen[4]).

[4]) Über Systeme hyperkomplexer Zahlen (erscheint demnächst).

§ 1.

K sei ein gegebener Grundkörper, $\mathfrak{H}$ eine irreduzible Gruppe linearer Substitutionen, deren Charakter zu K gehört[5]). Dann ist $\mathfrak{H}$ in einem algebraischen Körper $K(\vartheta)$ etwa vom Grade r über K rational darstellbar[6]). $\vartheta = \vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_r$ seien die Konjugierten zu ϑ, $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \ldots, \mathfrak{H}_r$ entsprechend die zu $\mathfrak{H}$ in bezug auf K algebraisch konjugierten Gruppen. Nach B gelten die folgenden leicht beweisbaren Tatsachen:

Es existieren Matrizen $P_{\alpha\beta}$, für die

$$\mathfrak{H}_\alpha P_{\alpha\beta} = P_{\alpha\beta}\mathfrak{H}_\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, r) \tag{1}$$

ist und die den folgenden Bedingungen genügen:

(A) 1. $P_{\alpha\beta}$ ist in $K(\vartheta_\alpha, \vartheta_\beta)$ rational, es ist $|P_{\alpha\beta}| \neq 0$.

(A) 2. Wendet man auf die Elemente von $P_{\alpha\beta}$ eine Permutation der Galoisschen Gruppe $\mathfrak{R}$ des Körpers $K(\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_r)$ in bezug auf den Grundkörper K an, bei der etwa ϑ_α in ϑ_γ, ϑ_β in ϑ_δ übergeht, so geht $P_{\alpha\beta}$ in $P_{\gamma\delta}$ über; kurz gesagt, man kann die Permutation von $\mathfrak{R}$ anwenden, indem man entsprechend die Indizes in $P_{\alpha\beta}$ permutiert.

(A) 3. Es ist P_{11} die Einheitsmatrix.

Genügen r^2 Matrizen desselben Grades diesen drei Bedingungen, so soll im folgenden stets gesagt werden, daß sie die Bedingungen (A) erfüllen; auch dann noch, falls der Grad 1 ist, die Matrizen also Zahlen sind.

Ferner gibt es ein System von r^3 Zahlen, das Faktorensystem von $\mathfrak{H}$, so daß die Gleichungen bestehen

$$P_{\alpha\beta}P_{\beta\gamma} = c_{\alpha\beta\gamma}P_{\alpha\gamma} \qquad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \ldots, r). \tag{2}$$

Durch $\mathfrak{H}$ sind die $P_{\alpha\beta}$ und das Faktorensystem noch nicht eindeutig bestimmt; man kann $P_{\alpha\beta}$ durch $k_{\alpha\beta}P_{\alpha\beta}$ ersetzen, wo die r^2 Zahlen $k_{\alpha\beta}$ die Bedingungen (A) erfüllen. An Stelle von $c_{\alpha\beta\gamma}$ tritt dann $c_{\alpha\beta\gamma}\frac{k_{\alpha\beta}k_{\beta\gamma}}{k_{\alpha\gamma}} = c'_{\alpha\beta\gamma}$; die Faktorensysteme $c_{\alpha\beta\gamma}$ und $c'_{\alpha\beta\gamma}$ heißen assoziiert und gelten als nicht wesentlich verschieden. Das Faktorensystem, dessen sämtliche Zahlen 1 sind, heißt das Einheitssystem. Dann und nur dann ist $\mathfrak{H}$ in K rational darstellbar, wenn das Faktorensystem dem Einheitssystem assoziiert ist[7]).

---

[5]) In dieser Voraussetzung liegt keine Einschränkung. — Bei Gruppen wird im folgenden nie die Existenz eines Einheitselementes vorausgesetzt, sondern nur, daß mit zwei Elementen auch immer das Produkt zum System gehört.

[6]) Man kann nämlich nach Burnside, Proceedings of the London Math. Soc., Ser. 2, **4** (1905), S. 1–9, eine in K rationale Gruppe angeben, die $\mathfrak{H}$ genau f-mal als irreduziblen Bestandteil enthält; aus Sch 2 folgt, daß $\mathfrak{H}$ in einem algebraischen Körper $K(\vartheta)$ über K rational darstellbar ist. Wegen der Burnsideschen Arbeit vgl. übrigens Anmerkung [9]).

[7]) In anderer Bezeichnungsweise findet sich dieses Resultat in Sp; vgl. dazu B, S. 413.

$\mathfrak{G}$ sei eine zweite Gruppe linearer Substitutionen; durchläuft G alle Elemente von $\mathfrak{G}$, H die von $\mathfrak{H}$, so bildet die Gesamtheit der Kroneckerschen Produkte $G \times H$ eine Gruppe, die mit $\mathfrak{G} \times \mathfrak{H}$ bezeichnet werde[8]). Sind $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ irreduzibel, so gilt das gleiche für $\mathfrak{G} \times \mathfrak{H}$, wie man leicht sieht. Der Charakter von $\mathfrak{G}$ möge nun ebenfalls zu K gehören, und es sei auch $\mathfrak{G}$ in $\mathsf{K}(\vartheta)$ rational. An Stelle von $P_{\alpha\beta}$ und $c_{\alpha\beta\gamma}$ bei $\mathfrak{H}$ mögen bei $\mathfrak{G}$ etwa die Matrizen $Q_{\alpha\beta}$ und das Faktorensystem $d_{\alpha\beta\gamma}$ treten. Dann folgt leicht, daß die entsprechende Rolle bei $\mathfrak{G} \times \mathfrak{H}$ die Matrizen $Q_{\alpha\beta} \times P_{\alpha\beta}$ spielen, und daß das Faktorensystem dieser Gruppe, die auch in $\mathsf{K}(\vartheta)$ rational ist und deren Charakter zu K gehört, aus den Zahlen $c_{\alpha\beta\gamma} \cdot d_{\alpha\beta\gamma}$ besteht. Entsprechendes gilt für Produkte aus mehreren Gruppen.

Das Kroneckersche Produkt von λ gleichen Faktoren $\mathfrak{H}$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{H}^{\lambda}$, es hat nach dem eben Gesagten das Faktorensystem $c^{\lambda}_{\alpha\beta\gamma}$. Die kleinste Zahl unter den stets existierenden ganzen rationalen positiven Zahlen λ, für die das System $c^{\lambda}_{\alpha\beta\gamma}$ dem Einheitssystem assoziiert ist, wurde in B als Exponent l des Systems bezeichnet. Dann und nur dann ist $c^{\lambda}_{\alpha\beta\gamma}$ dem Einheitssystem assoziiert, wenn l in λ aufgeht. Daraus folgt

Satz I. *Enthält* K *den Charakter der irreduziblen Gruppe* $\mathfrak{H}$, *und hat das Faktorensystem von* $\mathfrak{H}$ *den Exponenten* l, *so ist* $\mathfrak{H}^{\lambda}$ *dann und nur dann in* K *rational darstellbar, wenn* λ *durch* l *teilbar ist.*

Dieser Satz gibt eine neue Definition für den Exponenten l, er zeigt auch, daß l nur von K und dem Charakter von $\mathfrak{H}$ abhängt.

Durchläuft H alle Matrizen von $\mathfrak{H}$, so durchläuft die Transponierte H' eine gleichfalls irreduzible, in $\mathsf{K}(\vartheta)$ rationale Gruppe $\mathfrak{H}'$. Die algebraisch konjugierten Gruppen seien $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H}'_1, \mathfrak{H}'_2, \ldots, \mathfrak{H}'_r$. Aus (1) folgt

$$\begin{aligned} P'_{\alpha\beta}\mathfrak{H}'_{\alpha} &= \mathfrak{H}'_{\beta}P'_{\alpha\beta}, \\ \mathfrak{H}'_{\alpha}P'^{-1}_{\alpha\beta} &= P'^{-1}_{\alpha\beta}\mathfrak{H}'_{\beta}, \end{aligned} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, r).$$

Natürlich erfüllen die $P'^{-1}_{\alpha\beta}$ auch die Bedingungen (A). Aus (2) folgt

$$P'^{-1}_{\alpha\beta}P'^{-1}_{\beta\gamma} = \frac{1}{c_{\alpha\beta\gamma}}P'^{-1}_{\alpha\gamma} \qquad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \ldots, r).$$

Daher hat $\mathfrak{H}'$ das Faktorensystem $\frac{1}{c_{\alpha\beta\gamma}}$, also $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}'$ als Faktorensystem das Einheitssystem.

Satz II. *Enthält* K *den Charakter der irreduziblen Gruppe* $\mathfrak{H}$, *be-*

[8]) Wegen der Definition und einfachsten Eigenschaften des Kroneckerschen Produktes von Matrizen vergleiche man etwa E. Pascal, Repertorium der höheren Mathematik **1**, 2. Aufl. (1910), S. 148 u. f. Man beachte, daß man unter dem Kroneckerschen Produkt $\mathfrak{G} \times \mathfrak{H}$ häufig etwas anderes als das eben Definierte versteht.

deutet $\mathfrak{H}'$ die aus den Transponierten der Matrizen von $\mathfrak{H}$ gebildete Gruppe, so ist $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}'$ in K rational darstellbar[9]).

Ist $\mathfrak{H}$ eine endliche Gruppe mit von 0 verschiedenen Determinanten, so besteht $\mathfrak{H}'$ auch aus allen Matrizen H'^{-1}; sind $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}'$ in dieser Weise isomorph zugeordnet, so sind die Charaktere konjugiert komplex. Hat $\mathfrak{H}$ reellen Charakter, so sind $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}'$ bei passender Reihenfolge der Elemente ähnlich; also läßt sich dann $\mathfrak{H}^2 = \mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ in K rational darstellen. Für eine endliche Gruppe mit reellem Charakter ist der Exponent l entweder 1 oder 2.[10])

Wir kehren zum allgemeinen Fall zurück. E_n bezeichne für jedes n die Einheitsmatrix n-ten Grades. $k > 0$ sei eine durch m teilbare ganze Zahl. Nach Sch 2 kann man $E_k \times \mathfrak{H} = \mathfrak{F}$ [11]) rational in K darstellen, es sei etwa $Z^{-1} \mathfrak{F} Z$ in K rational, Z kann dabei in $\mathsf{K}(\vartheta)$ rational angenommen werden. Die zu $\mathfrak{F}$ in bezug auf K algebraisch konjugierte Gruppe $E_k \times \mathfrak{H}_\alpha$ werde mit $\mathfrak{F}_\alpha$ bezeichnet ($\alpha = 1, 2, \ldots, r$); analog seien $Z = Z_1, Z_2, \ldots, Z_r$ die zu Z algebraisch konjugierten Matrizen. Dann wird

$$Z_\alpha^{-1} \mathfrak{F}_\alpha Z_\alpha = Z_\beta^{-1} \mathfrak{F}_\beta Z_\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, r);$$

also, wenn man $Z_\alpha Z_\beta^{-1} = R_{\alpha\beta}$ setzt,

$$\mathfrak{F}_\alpha R_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} \mathfrak{F}_\beta . \tag{3}$$

Ersichtlich erfüllen die Matrizen $R_{\alpha\beta}$ die Bedingungen (A), es ist

$$R_{\alpha\beta} R_{\beta\gamma} = R_{\alpha\gamma} . \tag{4}$$

Wegen (1) transformiert $E_k \times P_{\alpha\beta}$ ebenfalls $\mathfrak{F}_\alpha$ in $\mathfrak{F}_\beta$, daher ist

$$R_{\alpha\beta} = V_{\alpha\beta} \cdot (E_k \times P_{\alpha\beta}), \tag{5}$$

wo $V_{\alpha\beta}$ eine mit $\mathfrak{F}_\alpha$ vertauschbare Matrix bedeutet. Man zerlege $V_{\alpha\beta}$ in k^2 Matrizen f-ten Grades

$$V_{\alpha\beta} = (W_{\varkappa\lambda}^{(\alpha,\beta)}) \qquad (\varkappa \text{ Zeilen-, } \lambda \text{ Spaltenindex; } \varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, k).$$

Wegen der Vertauschbarkeit von $\mathfrak{F}_\alpha$ und $V_{\alpha\beta}$ sind $\mathfrak{H}_\alpha$ und $W_{\varkappa\lambda}^{(\alpha,\beta)}$ vertauschbar. Da $\mathfrak{H}$ irreduzibel ist, ist also $W_{\varkappa\lambda}^{(\alpha,\beta)}$ eine Multiplikation, $W_{\varkappa\lambda}^{(\alpha,\beta)} = s_{\varkappa\lambda}^{(\alpha,\beta)} \cdot E_f$. Bei festem α, β setze man die Matrix k-ten Grades

---

[9]) Dieser Satz steht in engstem Zusammenhang mit dem Theorem auf S. 4 der in Anmerkung [6]) genannten Burnsideschen Arbeit. Doch ist dieses Theorem in der von Herrn Burnside angegebenen Form nicht allgemein richtig; man könnte daraus schließen, daß $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ in K rational darstellbar ist, daß also stets $l = 1$ oder $l = 2$ ist, was nicht stimmt. Wie das Theorem zu modifizieren ist, ergibt sich aus Satz II.

[10]) Vgl. B, S. 416.

[11]) Nach Definition ist $E_k \times \mathfrak{H}$ die vollständig zerfallende Gruppe vom Grade $k \cdot f$, die k-mal den irreduziblen Bestandteil $\mathfrak{H}$ enthält.

$(s_{\varkappa\lambda}^{(\alpha,\beta)}) = S_{\alpha\beta}$, dann wird $V_{\alpha\beta} = (W_{\varkappa\lambda}^{(\alpha,\beta)}) = S_{\alpha\beta} \times E_f$, also wegen (5)

$$(6) \qquad R_{\alpha\beta} = (S_{\alpha\beta} \times E_f)(E_k \times P_{\alpha\beta}) = S_{\alpha\beta} \times P_{\alpha\beta} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, r).$$

Aus (6), (4) und (2) folgt

$$S_{\alpha\gamma} \times P_{\alpha\gamma} = R_{\alpha\gamma} = R_{\alpha\beta} R_{\beta\gamma} = (S_{\alpha\beta} \times P_{\alpha\beta})(S_{\beta\gamma} \times P_{\beta\gamma}) = S_{\alpha\beta} S_{\beta\gamma} \times P_{\alpha\beta} P_{\beta\gamma}$$
$$= S_{\alpha\beta} S_{\beta\gamma} \times c_{\alpha\beta\gamma} P_{\alpha\gamma} = (c_{\alpha\beta\gamma} S_{\alpha\beta} S_{\beta\gamma}) \times P_{\alpha\gamma},$$

folglich wird $S_{\alpha\gamma} = c_{\alpha\beta\gamma} S_{\alpha\beta} S_{\beta\gamma}$ und also für $T_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta}'^{-1}$

$$(7) \qquad T_{\alpha\beta} T_{\beta\gamma} = c_{\alpha\beta\gamma} T_{\alpha\gamma}.$$

Mit $R_{\alpha\beta}$ und $P_{\alpha\beta}$ erfüllen wegen (6) auch die $S_{\alpha\beta}$ und folglich auch die $T_{\alpha\beta}$ die Bedingungen (A).

Gibt es für einen Grad k umgekehrt Matrizen $T_{\alpha\beta}$, die (A) genügen und die (7) erfüllen, so setze man $S_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}'^{-1}$, $R_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta} \times P_{\alpha\beta}$, $\mathfrak{F}_\alpha = E_k \times \mathfrak{H}_\alpha$. Dann gelten (3) und (4) und auch die $R_{\alpha\beta}$ genügen (A). Aus B § 1 folgt dann[12]), daß man $\mathfrak{F}$ in K rational darstellen kann, und daher muß nach Sch 2 der Schursche Index m von $\mathfrak{H}$ in k aufgehen.

Satz III. *Ist $c_{\alpha\beta\gamma}$ das Faktorensystem der irreduziblen Gruppe $\mathfrak{H}$, so gibt es dann und nur dann Matrizen k-ten Grades $T_{\alpha\beta}$, die den Bedingungen* (A) *genügen und für die $T_{\alpha\beta} T_{\beta\gamma} = c_{\alpha\beta\gamma} T_{\alpha\gamma}$ ist, wenn k durch den Schurschen Index m von $\mathfrak{H}$ teilbar ist.*

Wegen des Satzes III ist es auch möglich, vom Index m des Faktorensystems $c_{\alpha\beta\gamma}$ zu sprechen.

Aus (2) folgt für $T_{\alpha\beta} = P_{\alpha\beta}$ der Schursche Satz[13]): *Der Index m einer Gruppe in bezug auf einen Zahlkörper ist ein Teiler des Grades der Gruppe.* Weiter ergibt sich bei Übergang zu Determinanten aus Satz III sofort der 1. Teil von Satz I aus B, daß der Exponent l ein Teiler von m ist.

§ 2.

K sei ein gegebener Grundkörper, ϑ algebraisch vom Grade r in bezug auf K; $\vartheta = \vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_r$ seien die Konjugierten.

Satz IV. *Notwendig und hinreichend dafür, daß r^3 Zahlen $c_{\alpha\beta\gamma}$ $(\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \ldots, r)$ als Faktorensystem einer irreduziblen, in $\mathsf{K}(\vartheta)$ rationalen Gruppe $\mathfrak{H}$ auftreten, deren Charakter zu* K *gehört, sind die folgenden vier Bedingungen:*

1. *$c_{\alpha\beta\gamma}$ ist eine von 0 verschiedene Zahl aus*

$$\mathsf{K}(\vartheta_\alpha, \vartheta_\beta, \vartheta_\gamma) \qquad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \ldots, r).$$

---

[12]) Dort ist die Betrachtung nur für irreduzible Gruppen durchgeführt. Wegen (3) gilt sie auch noch für $\mathfrak{F} = E_k \times \mathfrak{H}$.

[13]) Sch 2, Satz VIII.

2. *Bei Anwendung einer Permutation K aus der Galoisschen Gruppe* $\mathfrak{R}$ *von* $\mathsf{K}(\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_r)$ *in bezug auf* K, *bei der* ϑ_α *in* $\vartheta_{\alpha'}$, ϑ_β *in* $\vartheta_{\beta'}$, ϑ_γ *in* $\vartheta_{\gamma'}$ *übergeht, geht* $c_{\alpha\beta\gamma}$ *in* $c_{\alpha'\beta'\gamma'}$ *über, man kann K unmittelbar auf die Indizes von* $c_{\alpha\beta\gamma}$ *anwenden.*

3. $c_{111} = 1$.

4. $c_{\alpha\beta\gamma} c_{\alpha\gamma\delta} = c_{\alpha\beta\delta} c_{\beta\gamma\delta} \quad (\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2, \ldots, r)$.

Beweis. Daß 1., 2. und 3. notwendig sind, ergibt sich sofort unter Berücksichtigung von (A) aus (2). 4. ergibt sich bei Anwendung des assoziativen Gesetzes auf $P_{\alpha\beta} P_{\beta\gamma} P_{\gamma\delta}$ mit Hilfe von (2), (vgl. Sch 3).

Umgekehrt seien r^3 Zahlen $c_{\alpha\beta\gamma}$ gegeben, die den vier Bedingungen genügen. Aus 2. und 3. folgt $c_{\alpha\alpha\alpha} = 1$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, r)$, ferner aus 4. für $\alpha = \beta = \gamma$ bzw. $\beta = \gamma = \delta$

$$c_{\alpha\alpha\delta} = 1, \qquad c_{\alpha\delta\delta} = 1 \qquad (\alpha, \delta = 1, 2, \ldots, r). \tag{8}$$

Man bestimme alle Systeme von r^2 Zahlen $l_{\varkappa\lambda}$ $(\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, r)$, bei denen $l_{\varkappa\lambda}$ eine Zahl aus $\mathsf{K}(\vartheta_\varkappa, \vartheta_\lambda)$ ist, die bei Anwendung einer $\vartheta_\varkappa$ in $\vartheta_{\varkappa'}$, ϑ_λ in $\vartheta_{\lambda'}$ überführenden Permutation aus $\mathfrak{R}$ gerade in $l_{\varkappa'\lambda'}$ übergeht; $l_{\varkappa\lambda}$ darf auch 0 sein. Mit Hilfe eines derartigen Systems bilde man die Matrix r-ten Grades

$$U = (c_{\varkappa\lambda 1} l_{\varkappa\lambda})_{\varkappa,\lambda}. \tag{9}$$

Die angehängten Indizes geben dabei die Zeilen- und Spaltenindizes an $(\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, r)$. Ist $U_1 = (c_{\varkappa\lambda 1} l'_{\varkappa\lambda})_{\varkappa,\lambda}$ eine zweite derartige Matrix, so ist wegen (4)

$$UU_1 = \Big(\sum_{\mu=1}^{r} c_{\varkappa\mu 1} l_{\varkappa\mu} c_{\mu\lambda 1} l'_{\mu\lambda}\Big)_{\varkappa,\lambda} = \Big(c_{\varkappa\lambda 1} \sum_{\mu=1}^{r} c_{\varkappa\mu\lambda} l_{\varkappa\mu} l'_{\mu\lambda}\Big)_{\varkappa,\lambda}.$$

Setzt man $l''_{\varkappa\lambda} = \sum_{\mu=1}^{r} c_{\varkappa\mu\lambda} l_{\varkappa\mu} l'_{\mu\lambda}$, so erfüllen diese Zahlen, wie man leicht sieht, auch die für die $l_{\varkappa\lambda}$ geforderten Bedingungen. Daher bildet die Gesamtheit aller Matrizen U eine Gruppe $\mathfrak{U}$ des Grades r. Aus (8) und (9) und den Bedingungen für die $l_{\varkappa\lambda}$ folgt, daß der Charakter von $\mathfrak{U}$ zu K gehört.

Jetzt soll die Irreduzibilität von $\mathfrak{U}$ nachgewiesen werden; nach einem Satz von Herrn Burnside[14]) genügt es, zu zeigen, daß f^2 linear unabhängige Matrizen in $\mathfrak{U}$ vorkommen.

In B werden zwei Indexpaare $\varkappa, \lambda$ und $\varkappa', \lambda'$ äquivalent genannt, wenn es in $\mathfrak{R}$ eine Permutation gibt, bei der $\vartheta_\varkappa$ in $\vartheta_{\varkappa'}$, ϑ_λ in $\vartheta_{\lambda'}$ übergeht. Alle Indexpaare zerfallen dann in Klassen von äquivalenten. Zu jeder Klasse gehören gewisse Matrizen U, die man erhält, wenn man für alle

[14]) Burnside, Proceedings of the London Math. Soc. Ser. 2, Vol. III, p. 430—434.

nicht zur Klasse gehörigen Paare $\varkappa, \lambda$ stets $l_{\varkappa\lambda} = 0$ setzt. Offenbar genügt es zu zeigen, daß zu jeder Klasse genau so viele linear unabhängige U gehören, wie die Klasse Indexpaare enthält. Insgesamt gibt es nämlich r^2 Indexpaare, und zwischen Matrizen, die zu verschiedenen Klassen gehören, besteht sicher keine nichttriviale Relation.

Wegen der Transitivität der Permutationsgruppe gibt es in jeder Klasse Paare $(\varkappa, \lambda)$ mit $\varkappa = 1, 2, \ldots, r$. Mit $\varkappa = 1$ gebe es in der Klasse noch etwa s Paare; dann gibt es zu jedem $\varkappa$ genau s Paare mit diesem festen $\varkappa$, und die Klasse enthält $r \cdot s$ Paare. Wir setzen, was ersichtlich zulässig ist,

$$l_{\varkappa\lambda} = \begin{cases} \vartheta_\varkappa^\varrho \, \vartheta_\lambda^\sigma & \text{für die Indexpaare aus unserer Klasse,} \\ 0 & \text{für die anderen Indexpaare.} \end{cases}$$

Dabei wähle man der Reihe nach $\varrho = 0, 1, \ldots, r-1$; $\sigma = 0, 1, 2, \ldots, s-1$; man erhält dann genau $r \cdot s$ Matrizen U. Eine lineare Relation mit den Koeffizienten $a_{\varrho\sigma}$ zwischen diesen hat zur Folge

$$\sum_{\varrho=0}^{r-1} \sum_{\sigma=0}^{s-1} a_{\varrho\sigma} \vartheta_\varkappa^\varrho \vartheta_\lambda^\sigma c_{\varkappa\lambda 1} = 0$$

für alle $\varkappa, \lambda$ aus unserer Klasse; also wegen $c_{\varkappa\lambda 1} \neq 0$

$$\sum_{\sigma=0}^{s-1} \vartheta_\lambda^\sigma \cdot \left(\sum_{\varrho=0}^{r-1} a_{\varrho\sigma} \vartheta_\varkappa^\varrho \right) = 0.$$

Hält man $\varkappa$ zunächst fest und ersetzt ϑ_λ durch x, so hat das entstehende Polynom $(s-1)$-ten Grades sicher s Wurzeln, nämlich $x = \vartheta_\lambda$; wo λ einer der s zu diesem festen $\varkappa$ gehörigen Indizes ist. Daher müssen alle Koeffizienten verschwinden, es muß für alle $\varkappa$ und σ

$$\sum_{\varrho=0}^{r-1} a_{\varrho\sigma} \vartheta_\varkappa^\varrho = 0$$

sein. Daraus schließt man analog $a_{\varrho\sigma} = 0$, also besteht zwischen den eben konstruierten $r \cdot s$ Matrizen U lineare Unabhängigkeit, $\mathfrak{U}$ ist irreduzibel.

Wie üblich, sei $e_{\varkappa\lambda} = 0$ für $\varkappa \neq \lambda$, $e_{\varkappa\varkappa} = 1$ $(\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, r)$. Ferner sei R die Wronskische Matrix $(\vartheta_\lambda^{r-\varkappa})_{\varkappa,\lambda}$, es sei

$$V = RUR^{-1}, \qquad \mathfrak{V} = R\mathfrak{U}R^{-1}. \tag{10}$$

K sei eine Permutation der Galoisschen Gruppe $\mathfrak{R}$, bei der etwa ϑ_ϱ in $\vartheta_{\alpha_\varrho}$ übergeht, es sei $\alpha_1 = \alpha$. Zugleich bedeute K die zugehörige Matrix r-ten Grades $K = (e_{\alpha_\varkappa,\lambda})$, also $K^{-1} = (e_{\varkappa,\alpha_\lambda})_{\varkappa,\lambda}$. Bei Anwendung der Permutation K aus der Galoisschen Gruppe mögen die in $\mathsf{K}(\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_r)$ rationalen Matrizen R, R^{-1} bzw. U in R_K, $(R^{-1})_K$ bzw. U_K übergehen; es ist

$$R_K = (\vartheta_\lambda^{r-\varkappa})_K = (\vartheta_{\alpha_\lambda}^{r-\varkappa}) = (\vartheta_\lambda^{r-\varkappa})_{\varkappa,\lambda} (e_{\varkappa,\alpha\lambda})_{\varkappa,\lambda} = R \cdot K^{-1}, \tag{11}$$

$$(12) \qquad (R^{-1})_K = R_K^{-1} = K \cdot R^{-1},$$

$$(13) \quad \begin{cases} U_K = (c_{\varkappa\lambda 1}\, l_{\varkappa\lambda})_K = (c_{a_\varkappa, a_\lambda, a} \cdot l_{a_\varkappa, a_\lambda})_{\varkappa,\lambda} = (e_{a_\varkappa,\lambda})_{\varkappa,\lambda}\,(c_{\varkappa\lambda a}\, l_{\varkappa\lambda})_{\varkappa,\lambda}\,(e_{\varkappa, a_\lambda})_{\varkappa,\lambda} \\ \qquad\qquad = K(c_{\varkappa\lambda a}\, l_{\varkappa\lambda}) \cdot K^{-1}, \end{cases}$$

wie sich aus 2. und den Bedingungen für $l_{\varkappa\lambda}$ ergibt.

Aus (10), (11), (12) und (13) folgt, daß V übergeht in

$$(14) \quad V_K = R_K U_K R_K^{-1} = RK^{-1} \cdot K(c_{\varkappa\lambda a}\, l_{\varkappa\lambda})_{\varkappa,\lambda} K^{-1} \cdot KR^{-1} = R(c_{\varkappa\lambda a}\, l_{\varkappa\lambda})_{\varkappa,\lambda} R^{-1}.$$

Ist $\alpha = 1$, so wird $V_K = V$, d. h. V bleibt bei Anwendung aller Permutationen der Galoisschen Gruppe, die ϑ_1 ungeändert lassen, auch ungeändert, ist also in $\mathsf{K}(\vartheta)$ rational[15]). Sind $V = V_1, V_2, \ldots, V_r$ die algebraisch konjugierten Matrizen, und wählt man $K < \mathfrak{K}$ so, daß ϑ_1 in ein beliebig vorgeschriebenes ϑ_α übergeht, so folgt aus (14)

$$(15) \qquad V_\alpha = R(c_{\varkappa\lambda a}\, l_{\varkappa\lambda})_{\varkappa,\lambda} R^{-1}.$$

Man setze

$$(16) \qquad T_{\alpha\beta} = \left(\frac{e_{\varkappa\lambda}}{c_{\varkappa\alpha\beta}}\right)_{\varkappa,\lambda}; \quad P_{\alpha\beta} = RT_{\alpha\beta}R^{-1} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, r).$$

Dann ist $|P_{\alpha\beta}| \neq 0$, ganz analog wie bei Untersuchung von V ergibt sich, daß $P_{\alpha\beta}$ in $\mathsf{K}(\vartheta_\alpha, \vartheta_\beta)$ rational ist, und daß bei einer Anwendung einer Permutation K aus $\mathfrak{K}$, die ϑ_α in ϑ_γ, ϑ_β in ϑ_δ überführt, $P_{\alpha\beta}$ gerade in $P_{\gamma\delta}$ übergeht. Schließlich ist $P_{\alpha\alpha} = T_{\alpha\alpha} = E_r$. Daher erfüllen die $P_{\alpha\beta}$ die Bedingungen (A). Ferner folgt aus (16) und 4.

$$(17) \quad \begin{cases} T_{\alpha\beta}^{-1}(c_{\varkappa\lambda a}\, l_{\varkappa\lambda})_{\varkappa\lambda}\, T_{\alpha\beta} = (e_{\varkappa\lambda}\, c_{\varkappa\alpha\beta})_{\varkappa,\lambda}(c_{\varkappa\lambda a}\, l_{\varkappa\lambda})_{\varkappa,\lambda}\left(\frac{e_{\varkappa\lambda}}{c_{\varkappa\alpha\beta}}\right)_{\varkappa,\lambda} \\ \qquad\qquad = \left(\frac{c_{\varkappa\alpha\beta}\, c_{\varkappa\lambda a}}{c_{\lambda a\beta}}\, l_{\varkappa\lambda}\right)_{\varkappa,\lambda} = (c_{\varkappa\lambda\beta}\, l_{\varkappa\lambda})_{\varkappa,\lambda}, \end{cases}$$

also aus (17) durch Transformation mit R^{-1} wegen (15) und (16)

$$P_{\alpha\beta}^{-1} V_\alpha P_{\alpha\beta} = R(c_{\varkappa\lambda\beta}\, l_{\varkappa\lambda})_{\varkappa,\lambda} R^{-1} = V_\beta.$$

Sind also die zu $\mathfrak{V}$ algebraisch konjugierten Gruppen $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2, \ldots, \mathfrak{V}_r$, so gilt

$$(18) \qquad P_{\alpha\beta}^{-1} \mathfrak{V}_\alpha P_{\alpha\beta} = \mathfrak{V}_\beta.$$

Schließlich folgt aus 4. und (15) und (16)

$$T_{\alpha\beta} T_{\beta\gamma} = \left(\frac{e_{\varkappa\lambda}}{c_{\varkappa\alpha\beta}}\right)_{\varkappa,\lambda}\left(\frac{e_{\varkappa\lambda}}{c_{\varkappa\beta\gamma}}\right)_{\varkappa,\lambda} = \left(\frac{e_{\varkappa\lambda}}{c_{\varkappa\alpha\beta}\, c_{\varkappa\beta\gamma}}\right)_{\varkappa,\lambda} = \left(\frac{e_{\varkappa\lambda}}{c_{\alpha\beta\gamma}\, c_{\varkappa\alpha\gamma}}\right)_{\varkappa,\lambda} = \frac{1}{c_{\alpha\beta\gamma}} T_{\alpha\gamma},$$

$$(19) \qquad P_{\alpha\beta} P_{\beta\gamma} = \frac{1}{c_{\alpha\beta\gamma}} P_{\alpha\gamma}.$$

---

[15]) Mit Hilfe analoger Betrachtungen läßt sich übrigens § 1 von B formal vereinfachen.

Wegen (18) und (19) hat $\mathfrak{B}$ das Faktorensystem $\frac{1}{c_{\alpha\beta\gamma}}$. Die Gruppe $\mathfrak{B}'$ vom Grade r ist ebenfalls irreduzibel, in $\mathsf{K}(\vartheta)$ rational, und ihr Charakter gehört zu K; nach § 1 hat sie das Faktorensystem $c_{\alpha\beta\gamma}$. Damit ist Satz IV vollständig bewiesen.

Wir wollen jetzt untersuchen, welcher Zusammenhang zwischen Gruppen mit dem gleichen Faktorensystem besteht. Eine Gruppe $\mathfrak{H}$ soll *in bezug auf einen Zahlkörper* K *komplett* heißen, wenn alle linearen Verbindungen von Matrizen von $\mathfrak{H}$ mit Koeffizienten aus K wieder zu $\mathfrak{H}$ gehören. Jeder Gruppe $\mathfrak{H}$ ist eindeutig eine in bezug auf K komplette Gruppe zugeordnet, deren Elemente alle linearen Verbindungen von Elementen von $\mathfrak{H}$ mit Koeffizienten aus K sind. Gehört der Charakter von $\mathfrak{H}$ zu K, so auch der der zugehörigen kompletten Gruppe; ebenso ist diese Gruppe gleichzeitig mit $\mathfrak{H}$ in $\mathsf{K}(\vartheta)$ rational. Man schließt leicht, daß die komplette Gruppe dasselbe Faktorensystem hat.

Satz V. *Zwei irreduzible Gruppen* $\mathfrak{H}$ *und* $\mathfrak{F}$ *vom gleichen Grad* f *seien beide in* $\mathsf{K}(\vartheta)$ *rational; der Charakter beider Gruppen gehöre zu* K; $\mathfrak{H}$ *sei in bezug auf* K *komplett. Das Faktorensystem beider Gruppen sei dasselbe. Dann ist* $\mathfrak{F}$ *einer Untergruppe von* $\mathfrak{H}$ *ähnlich.*

Zu einem Faktorensystem gehört also bei festem Grad nur eine komplette irreduzible Gruppe.

Beweis. $\mathfrak{H}'$ habe dieselbe Bedeutung wie in § 1. $\mathfrak{F} \times \mathfrak{H}'$ und $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}'$ haben beide als Faktorensystem das Einheitssystem, lassen sich also beide in K rational machen; es seien etwa $M^{-1}(\mathfrak{F} \times \mathfrak{H}')M$ und $N^{-1}(\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}')N$ in K rational. Diese beiden Gruppen enthalten die beiden ähnlichen Untergruppen $M^{-1}(E_f \times \mathfrak{H}')M$ und $N^{-1}(E_f \times \mathfrak{H}')N$, wir können also, wenn wir eventuell M durch eine Matrix MQ mit in K rationalem Q ersetzen, ohne Einschränkung

$$M^{-1}(E_f \times \mathfrak{H}')M = N^{-1}(E_f \times \mathfrak{H}')N \tag{20}$$

annehmen. Eine mit $E_f \times \mathfrak{H}'$ vertauschbare Matrix hat wegen der Irreduzibilität von $\mathfrak{H}'$ nach einem schon in § 1 verwendeten Schluß die Form $K \times E_f$. Daher gibt es genau f^2 linear unabhängige derartige Matrizen, also auch genau f^2 linear unabhängige mit der ähnlichen Gruppe $\tilde{\mathfrak{H}} = N^{-1}(E_f \times \mathfrak{H}')N$ vertauschbare Matrizen. Nun sind aber alle Matrizen von $N^{-1}(\mathfrak{H} \times E_f)N$ mit $\tilde{\mathfrak{H}}$ vertauschbar, wegen der Irreduzibilität von $\mathfrak{H}$ kommen darunter nach dem unter Anm.[14]) zitierten Burnsideschen Satz f^2 linear unabhängige Matrizen vor. Daher kann man jede mit $\tilde{\mathfrak{H}}$ vertauschbare Matrix W als lineare Verbindung von Matrizen von $N^{-1}(\mathfrak{H} \times E_f)N$ darstellen; ist W in K rational, so kann man dabei die Koeffizienten aus K wählen, da $N^{-1}(\mathfrak{H} \times E_f)N$ als Untergruppe von $N^{-1}(\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}')N$ in K

rational ist. Da nun $\mathfrak{H}$ in bezug auf K komplett war, gehört eine lineare Verbindung von Matrizen von $N^{-1}(\mathfrak{H} \times E_f)N$ mit Koeffizienten aus K selber zu dieser Gruppe; also ist $W < N^{-1}(\mathfrak{H} \times E_f)N$. Es sind aber alle Matrizen der Untergruppe $M^{-1}(\mathfrak{F} \times E_f)M$ von $M^{-1}(\mathfrak{F} \times \mathfrak{H}')M$ in K rational und wegen (20) mit $\tilde{\mathfrak{H}}$ vertauschbar. Daher folgt

$$M^{-1}(\mathfrak{F} \times E_f)M < N^{-1}(\mathfrak{H} \times E_f)N.$$

Aus der Irreduzibilität von $\mathfrak{F}$ folgt dann leicht, daß $\mathfrak{F}$ einer Untergruppe von $\mathfrak{H}$ ähnlich ist, was zu beweisen war.

Eine ähnliche Methode soll noch bei einer anderen Fragestellung angewendet werden. $\mathfrak{H}$ sei eine Gruppe mit dem Faktorensystem $c_{\alpha\beta\gamma}$. $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ mögen dieselbe Bedeutung wie beim Beweis von Satz IV haben. $\mathfrak{V}$ hat das Faktorensystem $\frac{1}{c_{\alpha\beta\gamma}}$, ferner ist $\mathfrak{V}$ in bezug auf K komplett. $\mathfrak{V} \times \mathfrak{H}$ läßt sich in K rational darstellen; es sei $N^{-1}(\mathfrak{V} \times \mathfrak{H})N$ in K rational. Dann schließt man analog wie oben, daß die Gesamtheit der in K rationalen Matrizen W die mit der in K rationalen Gruppe $\tilde{\mathfrak{H}} = N^{-1}(E_r \times \mathfrak{H})N$ vertauschbar sind, gerade die Matrizen von $N^{-1}(\mathfrak{V} \times E_f)N$ sind. Die charakteristische Gleichung von W ist also die f-te Potenz der entsprechenden Matrix von $\mathfrak{V}$ und wegen (9) und (10) folgt:

Satz VI. *Man bilde alle Systeme aus r^2 Zahlen $l_{\varkappa\lambda}$ ($\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, r$), wo $l_{\varkappa\lambda}$ eine Zahl aus $\mathsf{K}(\vartheta_\varkappa, \vartheta_\lambda)$ ist, die bei Anwendung einer $\vartheta_\varkappa$ in $\vartheta_{\varkappa'}$, ϑ_λ in $\vartheta_{\lambda'}$ überführenden Permutation der Galoisschen Gruppe von $\mathsf{K}(\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_r)$ gerade in $l_{\varkappa'\lambda'}$ übergeht. Es sei $\tilde{\mathfrak{H}}$ eine zu $E_r \times \mathfrak{H}$ ähnliche, in K rationale Gruppe. Die Gesamtheit der charakteristischen Gleichungen der mit $\tilde{\mathfrak{H}}$ vertauschbaren, in K rationalen Matrizen erhält man dann als f-te Potenzen der charakteristischen Gleichungen von*

$$U = (c_{\varkappa\lambda 1}\, l_{\varkappa\lambda})_{\varkappa,\lambda}.$$

Offenbar hängt nämlich die Gesamtheit der charakteristischen Gleichungen nicht davon ab, durch welche spezielle Transformation man $\tilde{\mathfrak{H}}$ rational macht.

Man kann leicht die Gesamtheit der Systeme $l_{\varkappa\lambda}$ mit Hilfe von Parametern ausdrücken, für die beliebige Werte aus K eingesetzt werden dürfen.

Wählt man, was zulässig ist,

$$l_{\varkappa\lambda} = 0 \quad (\varkappa \neq \lambda); \qquad l_{\varkappa\varkappa} = \vartheta_\varkappa,$$

so hat U gerade die Wurzeln $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_r$. Ist nun eine zu $\mathfrak{H}$ ähnliche Gruppe $\mathfrak{L}$ im Körper $\mathsf{K}(\eta)$ vom Grade $s \leqq r$ über K rational, $\tilde{\mathfrak{L}}$ zu $E_s \times \mathfrak{L}$ ähnlich und in K rational, so folgt analog, daß es eine mit $\tilde{\mathfrak{L}}$ vertauschbare, in K rationale Matrix Z gibt, die als Wurzeln gerade η und die Konjugierten zu η, alle in der Vielfachheit f, besitzt. Da der Index m

von $\mathfrak{H}$ in s und r aufgehen muß, kann man für $r \neq s$ auch $E_{r-s} \times \mathfrak{H}$ in K rational darstellen, $\mathfrak{M}$ sei eine solche Darstellung. Es sei

$$\mathfrak{N} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathfrak{H}} & 0 \\ 0 & \mathfrak{M} \end{pmatrix}, \qquad W = \begin{pmatrix} Z & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Im Fall $r = s$ setze man $\mathfrak{N} = \tilde{\mathfrak{H}}$, $W = Z$. Dann sind $\mathfrak{N}$ und W in K rational, W und $\mathfrak{N}$ sind vertauschbar, und $\mathfrak{N}$ ist zu $E_r \times \mathfrak{H}$, also zu $\tilde{\mathfrak{H}}$ ähnlich. Ferner hat W außer den Wurzeln von Z noch die $(r-s)$-fache Wurzel 0. Daraus folgt, daß es auch eine mit $\tilde{\mathfrak{H}}$ vertauschbare, in K rationale Matrix gibt, die dieselben Wurzeln wie W hat, also eine Matrix U der Form (9), die η als einfache Wurzel besitzt.

Hat umgekehrt eine der Matrizen U eine μ-fache Wurzel η, so folgt aus Satz VI in Verbindung mit den Resultaten von Sch 1 und 2, daß der Index von $\mathfrak{H}$ in bezug auf $\mathsf{K}(\eta)$ ein Teiler von μ ist. Für $\mu = 1$ ist $\mathfrak{H}$ in $\mathsf{K}(\eta)$ darstellbar.

Satz VII. *Dann und nur dann ist $\mathfrak{H}$ in einem algebraischen Körper $\mathsf{K}(\eta)$ von einem Grade $s \leqq r$ über K rational darstellbar, wenn eine Matrix*

$$U = (c_{\varkappa\lambda 1}\, l_{\varkappa\lambda})_{\varkappa,\lambda} \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, r)$$

η als einfache Wurzel hat. Dabei sollen die Zahlen $l_{\varkappa\lambda}$ den Bedingungen von Satz VI genügen. Hat eine Matrix U die μ-fache Wurzel η, so ist der Index von $\mathfrak{H}$ in bezug auf $\mathsf{K}(\eta)$ ein Teiler von μ.[16])

Wir setzen voraus, daß K den Charakter von $\mathfrak{H}$ enthält. Wenn das nicht der Fall ist, so kann man leicht die Aufstellung der fraglichen charakteristischen Gleichungen auf den hier behandelten Fall zurückführen.

§ 3.

Es sei $\mathsf{K}(\zeta)$ ein $\mathsf{K}(\vartheta)$ enthaltender algebraischer Körper vom Grade $t = u \cdot r$ über K; es sei etwa $\vartheta = \varphi(\zeta)$, wo φ ein in K rationales Polynom bedeutet. Die Konjugierten zu ζ seien $\zeta = \zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_t$, und zwar sei die Numerierung zunächst der Einfachheit halber so gewählt, daß

$$\vartheta_\alpha = \varphi(\zeta_{\alpha+\nu\cdot r}) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, r;\ \nu = 0, 1, 2, \ldots, u-1)$$

ist. Ist unter den alten Voraussetzungen $\mathfrak{H}$ in $\mathsf{K}(\vartheta)$ rational und besitzt $\mathfrak{H}$ das Faktorensystem $c_{\alpha\beta\gamma}$, so kann man $\mathfrak{H}$ auch als in $\mathsf{K}(\zeta)$ rationale Gruppe betrachten, das zugehörige Faktorensystem sei $c'_{\varkappa\lambda\mu}$ $(\varkappa, \lambda, \mu = 1, 2, \ldots, t)$. Ohne Schwierigkeiten erkennt man dann, daß man an-

---

[16]) Nach dem Früheren kann man die Matrizen U auch deuten als die Elemente der irreduziblen in bezug auf K kompletten Gruppe $\mathfrak{U}$ vom Grade r mit dem Faktorensystem $\frac{1}{c_{\alpha\beta\gamma}}$. Statt $\mathfrak{U}$ kann man auch $\mathfrak{U}'$ mit dem Faktorensystem $c_{\alpha\beta\gamma}$ nehmen.

nehmen kann

$$c'_{\alpha+\nu r,\,\beta+\varrho r,\,\gamma+\sigma r} = c_{\alpha\beta\gamma} \tag{21}$$

$$(\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \ldots, r;\ \nu, \varrho, \sigma = 0, 1, 2, \ldots, u-1).$$

Durch (21) ist das System $c'_{\varkappa\lambda\mu}$ vollständig bestimmt, wir wollen sagen, daß das System aus dem System $c_{\alpha\beta\gamma}$ *durch Erweiterung* entsteht, auch wenn die Konjugierten zu ζ nicht gerade wie eben numeriert sind. In jedem Falle enthält das erweiterte System dieselben Zahlen wie das ursprüngliche, nur alle u^3-mal. Wir wollen von $c_{\alpha\beta\gamma}$ sagen, daß es zum Körper $\mathsf{K}(\vartheta)$ über dem Grundkörper K gehört; $c'_{\varkappa\lambda\mu}$ gehört zu $\mathsf{K}(\zeta)$.

Der Grundkörper K ist in den folgenden Betrachtungen immer derselbe. Ist $\mathfrak{G}$ eine zu $\mathfrak{H}$ ähnliche, in einem algebraischen Körper $\mathsf{K}(\eta)$ über K rationale Gruppe mit dem Faktorensystem $d_{\alpha\beta\gamma}$, so soll untersucht werden, wie die Faktorensysteme $c_{\alpha\beta\gamma}$ und $d_{\alpha\beta\gamma}$ zusammenhängen. Es sei jetzt $\mathsf{K}(\zeta) = \mathsf{K}(\vartheta, \eta)$, man fasse $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ als in $\mathsf{K}(\zeta)$ rationale Gruppen auf; die zugehörigen erweiterten Faktorensysteme seien $c'_{\varkappa\lambda\mu}$ und $d'_{\varkappa\lambda\mu}$. Da man nun die $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{H}$ überführende Transformation in $\mathsf{K}(\zeta)$ rational wählen kann, müssen diese beiden zum Körper $\mathsf{K}(\zeta)$ gehörigen Faktorensysteme assoziiert sein. Wir wollen allgemeiner zwei zu den Körpern $\mathsf{K}(\vartheta)$ bzw. $\mathsf{K}(\eta)$ gehörige Faktorensysteme *assoziiert* nennen, wenn sie nach Erweiterung durch Übergang von $\mathsf{K}(\vartheta)$ bzw. $\mathsf{K}(\eta)$ zu $\mathsf{K}(\vartheta, \eta)$ im alten Sinn assoziiert sind. Wir haben dann den ersten Teil des folgenden Satzes bewiesen:

Satz VIII. *Ähnliche Gruppen haben assoziierte Faktorensysteme. Hat umgekehrt die Gruppe $\mathfrak{H}$ das Faktorensystem $c_{\alpha\beta\gamma}$, so gibt es zu jedem assoziierten Faktorensystem $d_{\alpha\beta\gamma}$ eine zu $\mathfrak{H}$ ähnliche Gruppe mit dem Faktorensystem $d_{\alpha\beta\gamma}$.*

Das Faktorensystem $d_{\alpha\beta\gamma}$ gehöre etwa zum Körper $\mathsf{K}(\eta)$ vom Grade s über K; es sei $\mathsf{K}(\zeta) = \mathsf{K}(\vartheta, \eta)$ vom Grade $t = u \cdot r = v \cdot s$. Nach § 2 gibt es eine Gruppe $\mathfrak{R}$ vom Grade r mit den folgenden Eigenschaften: $\mathfrak{R}$ ist irreduzibel, in $\mathsf{K}(\vartheta)$ rational, in bezug auf K komplett, der Charakter von $\mathfrak{R}$ gehört zu K, das Faktorensystem ist $\frac{1}{c_{\alpha\beta\gamma}}$. Eine Gruppe $\mathfrak{R}^*$ vom Grade t mit den gleichen Eigenschaften erhält man, wenn man alle aus u^2 Matrizen r-ten Grades zusammengesetzten Matrizen

$$R^* = (R_{\varkappa\lambda})_{\varkappa,\lambda} \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, u)$$

bildet, wo $R_{\varkappa\lambda}$ ein ganz beliebiges Element aus $\mathfrak{R}$ ist. Analog findet man eine Gruppe $\mathfrak{S}^*$ vom Grade t mit den Eigenschaften: $\mathfrak{S}^*$ ist irreduzibel, in $\mathsf{K}(\eta)$ rational, in bezug auf K komplett, der Charakter von $\mathfrak{S}^*$ gehört zu K, das Faktorensystem ist $\frac{1}{d_{\alpha\beta\gamma}}$.

Faßt man $\mathfrak{R}^*$ und $\mathfrak{S}^*$ als Gruppen in $\mathsf{K}(\zeta)$ auf, so sieht man, daß ihre Faktorensysteme im alten Sinne assoziiert sind, also als identisch angenommen werden können. Aus Satz V folgt, da $\mathfrak{R}^*$ und $\mathfrak{S}^*$ beide komplett sind, daß sie bei passender Zuordnung der Elemente ähnlich sind.

Man bilde nun $\mathfrak{H} \times \mathfrak{R}^*$. Das Faktorensystem des Produktes ist das Einheitssystem, also läßt sich $\mathfrak{H} \times \mathfrak{R}^*$ in K rational darstellen, es sei

$$\mathfrak{M} = U^{-1}(\mathfrak{H} \times \mathfrak{R}^*)U$$

in K rational. Man kann U in $\mathsf{K}(\vartheta)$ rational annehmen. Die in $\mathsf{K}(\eta)$ rationale Gruppe $E_f \times \mathfrak{S}^*$ ist zu $E_f \times \mathfrak{R}^*$, also auch zu $U^{-1}(E_f \times \mathfrak{R}^*)U$ ähnlich; die letzte Gruppe ist als Untergruppe von $\mathfrak{M}$ in K rational. Daher gibt es eine in $\mathsf{K}(\eta)$ rationale Matrix V von nicht verschwindender Determinante, so daß

$$V^{-1}(U^{-1}(E \times \mathfrak{R}^*)U)V = E_f \times \mathfrak{S}^* \tag{22}$$

ist. Es sei nun

$$\mathfrak{N} = V^{-1}U^{-1}(\mathfrak{H} \times E_t)UV. \tag{23}$$

Dann ist $\mathfrak{N}$ als Untergruppe von $V^{-1}U^{-1}(\mathfrak{H} \times \mathfrak{R}^*)UV = V^{-1}\mathfrak{M}V$ in $\mathsf{K}(\eta)$ rational. Da alle Elemente von $\mathfrak{H} \times E_t$ mit allen Elementen von $E_f \times \mathfrak{R}^*$ vertauschbar sind, gilt das gleiche wegen (22) und (23) für die Gruppen $\mathfrak{N}$ und $E_f \times \mathfrak{S}^*$, und daraus folgt wie beim Beweis von Satz III, daß $\mathfrak{N}$ von der Form $\mathfrak{G} \times E_t$ ist. Dabei ist $\mathfrak{G}$ eine in $\mathsf{K}(\eta)$ rationale Gruppe. Wegen der Ähnlichkeit von $\mathfrak{N} = \mathfrak{G} \times E_t$ und $\mathfrak{H} \times E_t$ ist $\mathfrak{G}$ zu $\mathfrak{H}$ ähnlich.

Da schließlich wegen (22) und (23)

$$\begin{aligned}\mathfrak{M} &= U^{-1}(\mathfrak{H} \times \mathfrak{R}^*)U = U^{-1}(\mathfrak{H} \times E_t)U \cdot U^{-1}(E_f \times \mathfrak{R}^*)U \\ &= V\mathfrak{N}V^{-1} \cdot V(E_f \times \mathfrak{S}^*)V^{-1} = V(\mathfrak{G} \times E_t)V^{-1} \cdot V(E_f \times \mathfrak{S}^*)V^{-1} \\ &= V(\mathfrak{G} \times \mathfrak{S}^*)V^{-1}\end{aligned}$$

ist, läßt sich $\mathfrak{G} \times \mathfrak{S}^*$ in K rational darstellen, also muß das Faktorensystem von $\mathfrak{G}$ zu dem von $\mathfrak{S}^*$ reziprok, also $d_{\alpha\beta\gamma}$ sein. Daher gibt es eine zu $\mathfrak{H}$ ähnliche, in $\mathsf{K}(\eta)$ rationale Gruppe $\mathfrak{G}$ mit dem Faktorensystem $d_{\alpha\beta\gamma}$; der zweite Teil des Satzes VIII ist auch bewiesen.

Aus Satz VIII folgt unmittelbar, daß, wenn zwei Faktorensysteme einem dritten assoziiert sind, sie auch untereinander assoziiert sind.

Assoziierte Faktorensysteme gelten als nicht wesentlich verschieden. Sind $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{F}$ zwei irreduzible Gruppen, deren Charakter zu K gehört, und hat bei irgendeiner Darstellung $\mathfrak{H}$ das Faktorensystem $c_{\alpha\beta\gamma}$, $\mathfrak{F}$ das System $d_{\varkappa\lambda\mu}$, so werde als Produkt der beiden Systeme das Faktorensystem von $\mathfrak{H} \times \mathfrak{F}$ definiert. Die Faktorensysteme bilden dann eine Abelsche Gruppe. Jedes Element ist in dieser Gruppe von endlicher Ordnung, die

Ordnung ist der Exponent des Faktorensystems. Ist ein algebraischer Körper $\mathsf{K}(\omega)$ über K gegeben, so bilden diejenigen Faktorensysteme, die ein zu $\mathsf{K}(\omega)$ gehöriges assoziiertes besitzen (oder, was dasselbe besagt, für die sich die zugehörigen Gruppen in $\mathsf{K}(\omega)$ darstellen lassen), eine Untergruppe der Abelschen Gruppe.

Hat die Gruppe $\mathfrak{H}$ den Index m in bezug auf K, so kann man $\mathfrak{H}$ in einem Körper m-ten Grades über K rational darstellen, es gibt also ein zu dem Faktorensystem von $\mathfrak{H}$ assoziiertes, das zu einem Körper m-ten Grades über K gehört. Es sei das etwa schon $c_{\alpha\beta\gamma}$ selber, also $r = m$.

Nach § 2 kann man dann die zum Faktorensystem $c_{\alpha\beta\gamma}$ gehörige, in bezug auf K komplette Gruppe $\mathfrak{Z}$ des Grades m explizit angeben. Für eine feste ganze Zahl $t > 0$ bilde man dann alle aus t^2 Matrizen m-ten Grades zusammengesetzten Matrizen

$$T = (Z_{\varkappa\lambda})_{\varkappa,\lambda} \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, t),$$

wo die $Z_{\varkappa\lambda}$ ganz beliebige Matrizen aus $\mathfrak{Z}$ sind. Ersichtlich bilden die Matrizen T eine in $\mathsf{K}(\vartheta)$ rationale, irreduzible Gruppe J des Grades $t \cdot m$, deren Charakter zu K gehört, die in bezug auf K komplett ist und deren Faktorensystem $c_{\alpha\beta\gamma}$ ist. Da der Grad aller irreduziblen Gruppen mit diesem Faktorensystem durch m teilbar, also von der Form $t \cdot m$ ist, haben wir für alle möglichen Grade eine komplette Gruppe mit diesem Faktorensystem angegeben.

Berücksichtigt man, daß man nach Satz III vom Index m des Faktorensystems sprechen kann, so erhält man:

Satz IX. *Dann und nur dann gibt es zu einem gegebenen Faktorensystem $c_{\alpha\beta\gamma}$ vom Index m irreduzible Gruppen vom Grade f, wenn f durch m teilbar ist.*

Weiter folgt unter Berücksichtigung von (9), (10) und der Sätze V und VIII:

Satz X. *$\mathfrak{H}$ sei eine irreduzible Gruppe f-ten Grades vom Index m in bezug auf einen Zahlkörper K, dem der Charakter von $\mathfrak{H}$ angehört, es sei $f = t \cdot m$; $c_{\alpha\beta\gamma}$ sei ein zum Faktorensystem von $\mathfrak{H}$ assoziiertes, das zu einem algebraischen Körper $\mathsf{K}(\vartheta)$ von möglichst kleinem Grad gehört. Dann hat $\mathsf{K}(\vartheta)$ den Grad m. Sind $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_r$ die Konjugierten zu ϑ, bedeutet R die Wronskische Matrix m-ten Grades $(\vartheta_\lambda^{m-\varkappa})_{\varkappa,\lambda}$, so haben bei passender Wahl der Variablen alle Matrizen von $\mathfrak{H}$ die Form*

$$(24) \qquad H = \begin{pmatrix} R\left(\frac{1}{c_{\varkappa\lambda 1}} l_{\varkappa\lambda}^{(1,1)}\right)_{\varkappa,\lambda} R^{-1}, & \ldots, & R\left(\frac{1}{c_{\varkappa\lambda 1}} l_{\varkappa\lambda}^{(1,t)}\right)_{\varkappa,\lambda} R^{-1} \\ \cdots\cdots\cdots\

Dabei genügen für jedes feste Paar α, β $(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, t)$ *die* m^2 *Zahlen* $l_{\varkappa\lambda}^{(\alpha,\beta)}$ *den im Satz* VIII *für die Zahlen* $l_{\varkappa\lambda}$ *gestellten Bedingungen.*

Zusatz: Man kann die Elemente von $\mathfrak{H}$ *darstellen als Matrizen vom Grade* t*, deren Elemente selbst Matrizen der irreduziblen kompletten Gruppe vom Grade* m *mit dem Faktorensystem* $c_{\alpha\beta\gamma}$ *sind.*

Kennt man also ein assoziiertes Faktorensystem, das zu einem Körper $\mathsf{K}(\vartheta)$ von möglichst kleinem Grad gehört, so übersieht man vollständig, in welcher Weise bei passender Wahl der Variablen die Irrationalitäten von $\mathsf{K}(\vartheta)$ in $\mathfrak{H}$ auftreten. Aus dem früher Gesagten ergibt sich, daß alle H in $\mathsf{K}(\vartheta)$ rational sind.

§ 4.

Im Anschluß an § 2 soll untersucht werden, wie man die Faktorensysteme über einem gegebenen Grundkörper K aufstellen kann.

Satz XI. *Hat das Faktorensystem* $c_{\alpha\beta\gamma}$ *den Exponenten* l*, so gibt es ein assoziiertes Faktorensystem, dessen Zahlen sämtlich* l*-te Einheitswurzeln sind.*

Beweis. $c_{\alpha\beta\gamma}$ gehöre zum Körper $\mathsf{K}(\vartheta)$. Da der Exponent des Systems l ist, gibt es nach B Zahlen $k_{\alpha\beta}$, die den Bedingungen (A) genügen, und für die für alle α, β, γ

$$\frac{k_{\alpha\beta}\, k_{\beta\gamma}}{k_{\alpha\gamma}} = c_{\alpha\beta\gamma}^{l} \tag{25}$$

ist. Wir denken uns zu $\mathsf{K}(\vartheta)$ alle Konjugierten von ϑ und alle Werte von $\sqrt[l]{k_{\alpha\beta}}$ für alle α und β adjungiert, der entstehende Normalkörper sei $\mathsf{K}(\eta)$. Die zu $\mathsf{K}(\eta)$ gehörige Erweiterung $c'_{\varkappa\lambda\mu}$ von $c_{\alpha\beta\gamma}$ erhält man nach § 3. Man überzeugt sich leicht, daß es Zahlen $k'_{\varkappa\lambda}$ gibt, die den Bedingungen (A) jetzt für den Körper $\mathsf{K}(\eta)$ genügen, für die

$$\frac{k'_{\varkappa\lambda}\, k'_{\lambda\mu}}{k'_{\varkappa\mu}} = c'^{\,l}_{\varkappa\lambda\mu} \tag{26}$$

ist, derart, daß jedes $k'_{\varkappa\lambda}$ mit einem $k_{\alpha\beta}$ übereinstimmt. Daher gehören alle Werte von $\sqrt[l]{k'_{\varkappa\lambda}}$ zu $\mathsf{K}(\eta)$. Man setze

$$h_{\varkappa\lambda} = \sqrt[l]{k'_{\varkappa\lambda}}, \tag{27}$$

wo man über die l-ten Wurzeln nur so zu verfügen hat, daß die Zahlen $h_{\varkappa\lambda}$ auch den Bedingungen (A) genügen, was offenbar möglich ist.

Jetzt setze man

$$c''_{\varkappa\lambda\mu} = c'_{\varkappa\lambda\mu} \cdot \frac{h_{\varkappa\mu}}{h_{\varkappa\lambda} h_{\lambda\mu}}.$$

Aus (26) und (27) folgt, daß dieses zu $c'_{\varkappa\lambda\mu}$ und also auch zu $c_{\alpha\beta\gamma}$ assoziierte Faktorensystem nur aus l-ten Einheitswurzeln besteht. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Offenbar ist die Betrachtung auch dann anwendbar, wenn l nicht der genaue Exponent ist, aber Gleichungen (25) bestehen.

Will man entscheiden, ob zwei gegebene Faktorensysteme assoziiert sind, so hat man nur zu untersuchen, ob der „Quotient" der beiden Systeme zum Einheitssystem assoziiert ist. Da man annehmen kann, daß alle Zahlen dieses Quotienten l-te Einheitswurzeln sind, so hat man nur zu untersuchen, ob ein gegebenes Faktorensystem, dessen Zahlen Einheitswurzeln eines festen Grades, etwa n-te Einheitswurzeln sind, zu dem Einheitssystem assoziiert ist; n sei dabei möglichst niedrig gewählt.

Das betreffende Faktorensystem sei $c_{\alpha\beta\gamma}$ und gehöre zum Körper $\mathsf{K}(\vartheta)$ vom Grade r, den wir als Normalkörper annehmen können. Dann und nur dann ist es dem Einheitssystem assoziiert, wenn es Zahlen $k_{\alpha\beta}$ gibt, die den Bedingungen (A) genügen, und für die

$$\frac{k_{\alpha\beta}\cdot k_{\beta\gamma}}{k_{\alpha\gamma}} = c_{\alpha\beta\gamma} \tag{28}$$

ist. Dann wird aber

$$k^n_{\alpha\beta}\cdot k^n_{\beta\gamma} = k^n_{\alpha\gamma}.$$

Daraus folgt[17]), daß es eine Zahl w in $\mathsf{K}(\vartheta)$ gibt, für die

$$k^n_{\alpha\beta} = \frac{w_\alpha}{w_\beta} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, r) \tag{29}$$

ist, wenn $w = w_1, w_2, \ldots, w_r$ die Konjugierten zu w sind. Wir adjungieren einen Wert von $\sqrt[n]{w_1}$ zu $\mathsf{K}(\vartheta)$; dann gehören alle Werte von $\sqrt[n]{w_1}$ zu dem entstehenden Körper, da die n-ten Einheitswurzeln sich auch durch die $c_{\alpha\beta\gamma}$ ausdrücken lassen und daher zu $\mathsf{K}(\vartheta)$ gehören. Ferner gehören wegen (29) alle Werte von $\sqrt[n]{w_\alpha}$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, r)$ zu dem entstehenden Körper. Denkt man sich diese Adjunktion von vornherein durchgeführt, so erkennt man, daß man ohne Einschränkung annehmen kann, daß alle Werte von $\sqrt[n]{w_\alpha}$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, r)$ zu $\mathsf{K}(\vartheta)$ gehören. Es sei

$$w_\alpha = z^n_\alpha, \tag{30}$$

---

[17]) Nach einer Methode von Herrn Speiser (Sp. S. 3) setze man nämlich $w_\alpha = \sum_{\varrho=1}^{r} u_\varrho k^n_{\alpha\varrho}$, wo u eine Zahl aus $\mathsf{K}(\vartheta)$ mit den Konjugierten $u = u_1, u_2, \ldots, u_r$ ist, und verfüge über u so, daß $w \neq 0$ wird, was stets möglich ist.

und zwar seien die z_α so gewählt, daß sie die Konjugierten zu $z = z_1$ sind. Setzen wir $k'_{\alpha\beta} = k_{\alpha\beta} \cdot \frac{z_\beta}{z_\alpha}$, so genügen auch diese Zahlen den Bedingungen (A) und erfüllen auch (28). Wegen (29) und (30) sind sie alle n-te Einheitswurzeln.

Ist also das System $c_{\alpha\beta\gamma}$ dem Einheitssystem assoziiert, so ist es nach Adjunktion der n-ten Wurzel aus einer geeigneten Zahl aus $\mathsf{K}(\vartheta)$ möglich, die Zahlen $k_{\alpha\beta}$ als n-te Einheitswurzeln zu wählen.

Wir gehen von einem festen Faktorensystem aus, dessen Zahlen n-te Einheitswurzeln sind, und adjungieren $\sqrt[n]{x}$, wo x eine ganz beliebige Zahl aus $\mathsf{K}(\vartheta)$ ist; in dem entstehenden Körper $\mathsf{K}(\eta)$ gehört zu $c_{\alpha\beta\gamma}$ eine ganz bestimmte Erweiterung $c'_{\varkappa\lambda\mu}$. Um $c'_{\varkappa\lambda\mu}$ nach § 3 aufzustellen, braucht man nur die Galoissche Gruppe von $\mathsf{K}(\eta)$ in bezug auf K und die zum Teilkörper $\mathsf{K}(\vartheta)$ gehörige Untergruppe dieser Gruppe zu kennen. Wählt man für x der Reihe nach alle Zahlen von $\mathsf{K}(\vartheta)$, so erhält man insgesamt nur endlich viele Möglichkeiten. Bei jedem festen $\mathsf{K}(\eta)$ hat man dann für die $k_{\alpha\beta}$ nur endlich viele Möglichkeiten durchzuprobieren, daß alle $k_{\alpha\beta}$ n-te Einheitswurzeln sind. Man kann also sagen, daß bei fest gegebenem $c_{\alpha\beta\gamma}$ die Entscheidung, ob dieses System dem Einheitssystem assoziiert ist, nur davon abhängt, ob es Körper gibt, die aus $\mathsf{K}(\vartheta)$ durch Adjunktion einer n-ten Wurzel entstehen und in bezug auf K eine geeignete Galoissche Gruppe haben.

Es sei z. B. ϑ vom Grade 2 in bezug auf K, das Faktorensystem sei gegeben durch

$$c_{121} = c_{212} = -1, \qquad c_{\alpha\beta\gamma} = 1 \quad \text{für alle anderen Tripel.}$$

Dieses System ist dem Einheitssystem dann und nur dann assoziiert, wenn es zyklische Körper 4. Grades gibt, die $\mathsf{K}(\vartheta)$ enthalten. Ist K der Körper der rationalen Zahlen, $\vartheta = \sqrt{d}$ mit ganzem quadratfreiem d, so ist das dann und nur dann der Fall, wenn d sich als Summe von zwei ganzen Quadraten darstellen läßt, insbesondere also $d > 0$ ist.

Man kann also sagen, daß die Behandlung der Frage nur von algebraischen Struktureigenschaften von $\mathsf{K}(\vartheta)$ abhängt.

Jetzt sei K ein algebraischer Zahlkörper, $c_{\alpha\beta\gamma}$ ein zu dem Normalkörper $\mathsf{K}(\vartheta)$ gehöriges Faktorensystem, das aus n-ten Einheitswurzeln besteht. Es soll eine andere idealtheoretische Methode zur Untersuchung der Frage, ob $c_{\alpha\beta\gamma}$ dem Einheitssystem assoziiert ist, skizziert werden.

$k_{\alpha\beta}$ und w_α mögen dieselbe Bedeutung wie in (28) und (29) haben. Man darf annehmen, daß w eine ganze algebraische Zahl ist.

Ist $\mathfrak{a}$ irgendein Ideal des Körpers $\mathsf{K}(\vartheta)$, so bezeichne $\mathfrak{a}_\alpha$ das Ideal, das aus $\mathfrak{a}$ entsteht, wenn man alle Zahlen von $\mathfrak{a}$ durch ϑ ausdrückt und

ϑ durch ϑ_α $(\alpha = 1, 2, \ldots, r)$ ersetzt. Dabei seien wie früher die ϑ_α die zu ϑ in bezug auf K als Grundkörper konjugierten Größen.

Man zerlege das Hauptideal $w \cdot \mathfrak{o}$ in Primideale, es sei

$$w\mathfrak{o} = \mathfrak{r}^n \cdot \mathfrak{s},$$

wo $\mathfrak{s}$ ein Produkt von Primidealpotenzen ist, deren Exponent $< n$ ist. Dann ist

$$w_\alpha \mathfrak{o} = \mathfrak{r}_\alpha^n \mathfrak{s}_\alpha.$$

Da nun nach (29) $\frac{w_\alpha}{w_\beta}$ für alle α und β die n-te Potenz einer Zahl aus $\mathsf{K}(\vartheta)$ ist, folgt, daß ein in $\mathfrak{s}$ aufgehendes Primideal in derselben Potenz in jedem $\mathfrak{s}_\alpha$ aufgeht, und daher ist

$$\mathfrak{s}_\alpha = \mathfrak{s} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, r).$$

Daher ist

$$w_\beta \cdot \mathfrak{r}_\alpha^n = w_\alpha \cdot \mathfrak{r}_\beta^n \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, r). \tag{31}$$

Durchläuft $\mathfrak{a}$ alle Ideale einer Idealklasse K, so durchläuft auch $\mathfrak{a}_\alpha$ alle Ideale einer Klasse, die mit K_α bezeichnet werden möge. K sei die Idealklasse, der $\mathfrak{r}$ angehört, dann folgt aus (31)

$$K_\alpha^n = K_\beta^n \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, r). \tag{32}$$

Ist umgekehrt für eine Idealklasse K diese Bedingung erfüllt und $\mathfrak{r}$ ein Ideal aus K, so gibt es Zahlen $\varrho_{\alpha\beta}$ und $\sigma_{\alpha\beta}$, die den Bedingungen (A) genügen, so daß

$$\varrho_{\alpha\beta} \cdot \mathfrak{r}_\alpha^n = \sigma_{\alpha\beta} \cdot \mathfrak{r}_\beta^n \tag{33}$$

ist. Durch (33) ist $\frac{\sigma_{\alpha\beta}}{\varrho_{\alpha\beta}}$ bis auf eine Einheit bestimmt. Soll es also eine Zahl w geben, für die außerdem (31) erfüllt ist, so muß

$$\frac{w_\alpha}{w_\beta} = \frac{\sigma_{\alpha\beta}}{\varrho_{\alpha\beta}} \varepsilon_{\alpha\beta} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, r) \tag{34}$$

sein, wo die $\varepsilon_{\alpha\beta}$ ein System von Einheiten sind, die den Bedingungen (A) genügen. Mit Hilfe eines Systems von Fundamentaleinheiten ist es leicht möglich zu untersuchen, ob sich (34) erfüllen läßt. Wie man leicht einsieht, genügt es für das Folgende, bei gegebenem $\mathfrak{r}$, falls es überhaupt Lösungen gibt, nur endlich viele angebbare Systeme $\varepsilon_{\alpha\beta}$ zu betrachten; man hat dann auch für w nur endlich viele Möglichkeiten.

Danach hat man bei festem w zu entscheiden, ob $k_{\alpha\beta} = \sqrt[n]{\frac{w_\alpha}{w_\beta}}$ auch wirklich eine Zahl aus $\mathsf{K}(\vartheta)$ ist $(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, r)$. Über die Wurzeln ist dabei nur so zu verfügen, daß die $k_{\alpha\beta}$ den Bedingungen (A) genügen.

Das Faktorensystem $c_{\alpha\beta\gamma}$ ist durch (28) bestimmt; zu dem Ideal $\mathfrak{r}$ gehören also gewisse angebbare Faktorensysteme $c_{\alpha\beta\gamma}$. Geht man von einem anderen Ideal der Klasse K aus, so wird man auf dieselben Faktorensysteme geführt.

Man führe die Betrachtung für jede der endlich vielen Idealklassen durch; es genügt, sich auf diejenigen zu beschränken, für die (32) erfüllt ist. Man erhält mit endlich vielen Schritten alle dem Einheitssystem assoziierten Faktorensysteme, deren Zahlen n-te Einheitswurzeln sind.

Daher ist es für den Fall, daß K ein algebraischer Körper ist, möglich, auf diesem Wege zu entscheiden, ob zwei Faktorensysteme assoziiert sind.

(Eingegangen am 22. Juli 1927.)

Über Konvexheit im kleinen und im großen und über gewisse den Punkten einer Menge zugeordnete Dimensionszahlen.

Von

Heinrich Tietze in München.

Einleitung.

1. Eine Punktmenge $\mathfrak{M}$ des n-dimensionalen euklidischen Raumes $\mathfrak{R}^n$ heißt bekanntlich konvex, wenn zugleich mit irgend zwei Punkten A, B von $\mathfrak{M}$ stets auch alle Punkte der Verbindungsstrecke AB zu $\mathfrak{M}$ gehören. Von einer Menge $\mathfrak{M}$ soll gesagt werden, sie sei *im Punkte P konvex im kleinen*, wenn es eine den Punkt P enthaltende konvexe Teilmenge $\mathfrak{K}(P)$ von $\mathfrak{M}$ gibt, die für ein geeignetes $\varrho > 0$ alle Punkte X von $\mathfrak{M}$ mit einem Abstand $\overline{PX} < \varrho$ umfaßt[1]). Von $\mathfrak{M}$ soll gesagt werden, $\mathfrak{M}$ sei *konvex im kleinen*, wenn die Menge $\mathfrak{M}$ in jedem ihrer Punkte konvex im kleinen ist. Im folgenden wollen wir den Satz beweisen:

Satz 1. *Eine abgeschlossene zusammenhängende Punktmenge $\mathfrak{M}$, die konvex im kleinen ist, ist konvex.*

Durch die Voraussetzung der Konvexheit im kleinen wird natürlich nur dem Verhalten der Menge $\mathfrak{M}$ in der Umgebung ihrer Begrenzungspunkte eine Einschränkung auferlegt (denn jede Menge ist in jedem ihrer inneren Punkte konvex im kleinen). Anderen Orts[2]) habe ich mich mit einer Voraussetzung anderer Art, nämlich einer gewissen Stützeigenschaft im kleinen (im Falle $n = 2$ das Vorhandensein einer „Stützstrecke“ an $\mathfrak{M}$

---

[1]) Unter Heranziehung des Begriffs der (Relativ-)Umgebung (vgl. Nr. 3) kann man dafür auch sagen: es existiert zu P in $\mathfrak{M}$ eine konvexe Umgebung $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{M})$.

[2]) a) Journal für reine u. angew. Math. **158**, S. 168, b) Math. Annalen **99** und c) Vortrag auf der Versammlung der Deutsch. Math. Ver. Kissingen 1927 (s. Jahresbericht **37**).

durch jeden ihrer Begrenzungspunkte) beschäftigt und gewisse Zusatzbedingungen angegeben, unter denen man aus dieser Voraussetzung auf die Konvexheit von $\mathfrak{M}$ schließen kann. Die Eigenschaft der Konvexheit im kleinen hat, wie man leicht sieht, jene Stützeigenschaft im kleinen zur Folge, aber nicht umgekehrt[3]). Erstere Eigenschaft besagt also mehr und dem entspricht es, daß wir hier, um auf Konvexheit (im großen) schließen zu können, ein geringeres Maß von Zusatzbedingungen (nämlich nur, daß $\mathfrak{M}$ abgeschlossen und zusammenhängend sein soll) benötigen[4]), als dort (wo u. a. insbesondere das Vorhandensein innerer Punkte von $\mathfrak{M}$ vorausgesetzt wurde).

2. Bei dem in §§ 3 bis 5 erbrachten Beweis von Satz 1 stützen wir uns auf Überlegungen in § 1 und 2 über gewisse *Dimensionszahlen*, die sich jedem Punkt P einer Menge bezüglich ihres Verhaltens in der Umgebung von P zuordnen lassen. Doch handelt es sich, wie ausdrücklich bemerkt sei, hier *nicht* um Charakterisierung dieser Umgebungen in topologischer Hinsicht. Für das Folgende ist insbesondere der Satz von Nutzen (Satz 2), daß eine zusammenhängende Punktmenge $\mathfrak{R}^n$, für deren sämtliche Punkte diese Dimensionszahl denselben Wert m hat, selbst in einem ebenen Teilraum $\mathfrak{R}^m$ des $\mathfrak{R}^n$ liegt.

Auch der anderwärts eingeführte, der allgemeinen Topologie angehörende Begriff „zusammenhängend in einem Punkte“ findet Anwendung (Nr. 10).

Für einen Teil des Beweises von Satz 1 (Fall $n = 2$) ergab sich eine wesentliche Vereinfachung auf Grund einer freundlichen Mitteilung, die ich Herrn Prüfer verdanke (vgl. § 4).

§ 1.

Über die einer Menge in einem Punkt zugeordnete Dimensionszahl.

3. Für die weiteren Entwicklungen erweisen sich einige der allgemeinen Topologie und Mengenlehre angehörende Begriffe als brauchbar[5]), von denen zunächst folgende angeführt seien. Unter einer *Umgebung* $\mathfrak{U}(P)$ eines

---

[3]) Z. B. hat ein Kreisbogen in jedem Punkte die Stützeigenschaft, ohne konvex im kleinen zu sein.

[4]) Daß Satz 1 bei Weglassung einer dieser Zusatzbedingungen nicht mehr gültig bliebe, sieht man etwa an folgenden Beispielen ebener nicht-konvexer Mengen: 1. $\mathfrak{M}$ besteht aus allen Punkten im Inneren eines Dreiecks einschließlich der Eckpunkte, aber ohne die anderen Punkte auf den Dreieckseiten ($\mathfrak{M}$ ist nicht abgeschlossen); 2. $\mathfrak{M}$ besteht aus der Vereinigung zweier getrennt liegender abgeschlossener Kreisflächen ($\mathfrak{M}$ ist nicht zusammenhängend).

[5]) Vgl. a) F. Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre (1914), Kap. 7; b) Encykl. III A B 13, Nr. 3, 8.

Punktes P des $\mathfrak{R}^n$ versteht man eine Punktmenge, die für ein geeignetes $\varrho > 0$ alle Punkte X mit einem Abstand $\overline{PX} < \varrho$ (und eventuell sonst noch beliebige andere Punkte) umfaßt. Ist nun $\mathfrak{M}$ irgendeine Punktmenge des $\mathfrak{R}^n$ und P ein Punkt von $\mathfrak{M}$, so bezeichnet man als eine (*Relativ-*) *Umgebung* $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{M})$ von P in $\mathfrak{M}$ eine Teilmenge von $\mathfrak{M}$, die für ein geeignetes $\varrho > 0$ alle Punkte X von $\mathfrak{M}$ mit einem Abstand $\overline{PX} < \varrho$ umfaßt (anders gesagt ist $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{M})$ der Durchschnitt von $\mathfrak{M}$ mit einer Umgebung $\mathfrak{U}(P)$ von $\mathfrak{M}$ im $\mathfrak{R}^n$). Dieser Begriff der Relativ-Umgebung entspricht einer Auffassung, bei der nur die gegenseitigen Lagebeziehungen der Punkte von $\mathfrak{M}$ untereinander betrachtet werden und von den übrigen Punkten des $\mathfrak{R}^n$ vollständig abstrahiert wird. Der gleichen Auffassung einer Menge $\mathfrak{M}$ (als eines selbständigen topologischen Raumes) entsprechen die Begriffe *relativ-abgeschlossen* und *relativ-offen*: Eine Teilmenge $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{M}$ heißt „in $\mathfrak{M}$ (relativ-) abgeschlossen", wenn $\mathfrak{N}$ jeden zu $\mathfrak{M}$ gehörigen Häufungspunkt von $\mathfrak{N}$ umfaßt; $\mathfrak{N}$ heißt „in $\mathfrak{M}$ (relativ-) offen", wenn es zu jedem Punkt P von $\mathfrak{N}$ eine zu $\mathfrak{N}$ gehörige $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{M})$ gibt. (Auf die Begriffe „zusammenhängend" und „zusammenhängend in einem Punkte" kommen wir in Nr. 6 und 10 zu sprechen.)

4. Durch ein System von $n - p$ unabhängigen linearen Gleichungen $\sum_k a_{ik} x_k = b_i$ zwischen den kartesischen Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ der Punkte des $\mathfrak{R}^n$ $(0 \leqq p < n)$ wird ein ebener p-dimensionaler Teilraum $\mathfrak{R}^p$ des $\mathfrak{R}^n$ bestimmt. Ist eine Punktmenge $\mathfrak{M}$ des $\mathfrak{R}^n$ gegeben, so werde mit $d(\mathfrak{M})$ die kleinste Zahl p bezeichnet, so daß es einen $\mathfrak{R}^p$ gibt, dem $\mathfrak{M}$ angehört ($d(\mathfrak{M}) = -1$, wenn $\mathfrak{M}$ die leere Menge ist). Ist P ein Punkt einer Menge $\mathfrak{M}$ des $\mathfrak{R}^n$, so werde mit $d(P|\mathfrak{M})$ die kleinste Zahl p bezeichnet, so daß es einen $\mathfrak{R}^p$ gibt, dem für ein geeignetes $\varrho > 0$ alle Punkte X von $\mathfrak{M}$ mit einem Abstand $\overline{PX} < \varrho$ angehören; anders gesagt ist $d(P|\mathfrak{M})$ die kleinste Zahl p, so daß eine der Gleichung $d(\mathfrak{U}) = p$ genügende Umgebung (vgl. Nr. 3) $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}(P|\mathfrak{M})$ existiert. Natürlich gilt:

$$d(P|\mathfrak{M}) \leqq d(\mathfrak{M}). \tag{1}$$

5. Aus dieser Definition der Dimensionszahlen $d(P|\mathfrak{M})$ folgt unmittelbar: In einer gewissen Umgebung eines Punktes P von $\mathfrak{M}$ liegen nur solche Punkte X von $\mathfrak{M}$, für welche $d(X|\mathfrak{M}) \leqq d(P|\mathfrak{M})$ ist; oder anders gesagt: für jede Zahl m ist die Menge $\mathfrak{M}_m^*$ der Punkte von $\mathfrak{M}$, für welche $d(P|\mathfrak{M}) \geqq m$ ist, relativ-abgeschlossen (vgl. Nr. 3) in $\mathfrak{M}$.

6. Es gibt Mengen $\mathfrak{M}$ von der besonderen Eigenschaft, daß $d(P|\mathfrak{M})$ für alle Punkte P von $\mathfrak{M}$ denselben Wert hat. Zum Beispiel hat (vgl. Nr. 7) jede konvexe Menge diese Eigenschaft, desgleichen jede offene Menge des $\mathfrak{R}^n$, sowie jede in einem ebenen Teilraum $\mathfrak{R}^p$ gelegene und in diesem

$\mathfrak{R}^p$ offene Menge. Für zusammenhängende [6]) Mengen mit dieser Eigenschaft gilt nun der folgende

Satz 2. *Wenn für zwei beliebige Punkte P, Q einer zusammenhängenden Menge $\mathfrak{M}$ die Gleichung gilt:*

$$d(P|\mathfrak{M}) = d(Q|\mathfrak{M}), \tag{2}$$

dann gilt für jeden Punkt P von $\mathfrak{M}$:

$$d(P|\mathfrak{M}) = d(\mathfrak{M}). \tag{3}$$

Beweis. Sei m der Wert, den $d(P|\mathfrak{M})$ gemäß (2) für alle Punkte P von $\mathfrak{M}$ hat; sei P_0 ein beliebiger Punkt von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{R}_0^m$ derjenige ebene m-dimensionale Raum durch P_0, dem alle in genügender Nähe von P_0 liegenden Punkte von $\mathfrak{M}$ angehören. Was wir zu zeigen haben, ist, daß die ganze Menge $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{R}_0^m$ liegt.

Hierzu bezeichnen wir mit $\mathfrak{N}$ die Menge derjenigen Punkte P von $\mathfrak{M}$, welche zusammen mit einer Relativ-Umgebung $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{M})$ in $\mathfrak{R}_0^m$ liegen [7]). Wir wollen den Nachweis, daß $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{R}_0^m$ liegt, führen, indem wir zeigen, daß $\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{M}$ sowohl relativ-abgeschlossen, als auch relativ-offen ist, daß also, weil $\mathfrak{M}$ zusammenhängend ist, $\mathfrak{N}$ nicht echte Teilmenge von $\mathfrak{M}$ sein kann und somit $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}$ sein muß.

Wir zeigen zunächst: $\mathfrak{N}$ ist relativ-abgeschlossen in $\mathfrak{M}$. Ist nämlich Q ein zu $\mathfrak{M}$ gehöriger Häufungspunkt von $\mathfrak{N}$ — natürlich liegt dann Q in $\mathfrak{R}_0^m$ —, und ist ϱ eine beliebige positive Zahl, so gibt es einen Punkt P aus $\mathfrak{N}$ mit $\overline{QP} < \frac{1}{2}\varrho$, ferner in einer geeignet kleinen Umgebung von P ein System von $m+1$ unabhängigen (d. h. keinem $\mathfrak{R}^{m-1}$ angehörigen) Punkten $X_1, X_2, \ldots, X_{m+1}$ aus $\mathfrak{M}$, die sämtlich in $\mathfrak{R}_0^m$ liegen und für die $\overline{PX_\nu} < \frac{1}{2}\varrho$ also $\overline{QX_\nu} < \varrho$ ist. Eine Relativumgebung $\mathfrak{U}(Q|\mathfrak{M})$, die ganz in einem $\mathfrak{R}^m$ liegt und alle Punkte X aus $\mathfrak{M}$ mit einem Abstand $\overline{QX} < \varrho$ umfaßt, kann also, weil sie ein solches System von $m+1$ unabhängigen Punkten $X_1, \ldots, X_{m+1}$ des $\mathfrak{R}_0^m$ enthält, in keinem anderen $\mathfrak{R}^m$ liegen, als in $\mathfrak{R}_0^m$. Also gehört Q zu $\mathfrak{N}$: es ist $\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{M}$ abgeschlossen, wie behauptet.

Nunmehr zeigen wir: $\mathfrak{N}$ ist in $\mathfrak{M}$ relativ-offen, d. h. kein Punkt von $\mathfrak{N}$ ist Häufungspunkt von $\mathfrak{M} - \mathfrak{N}$. Zunächst ist aus der Definition

---

[6]) Eine Menge $\mathfrak{M}$ heißt *zusammenhängend* [vgl. Hausdorff, loc. cit. [5]) a), S. 244], wenn sie sich nicht in zwei nicht-leere, in $\mathfrak{M}$ relativ-abgeschlossene Teilmengen zerlegen läßt; anders gesagt: wenn es keine echte Teilmenge von $\mathfrak{M}$ gibt, die zugleich relativ-abgeschlossen und relativ-offen in $\mathfrak{M}$ ist.

[7]) Es ist vorerst noch nicht ausgeschlossen, daß in $\mathfrak{R}_0^m$ auch noch andere Punkte von $\mathfrak{M}$ liegen, deren Umgebung einem von $\mathfrak{R}_0^m$ verschiedenen $\mathfrak{R}^m$ angehört; wir können daher $\mathfrak{N}$ nicht einfach als Durchschnitt von $\mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{R}_0^m$ definieren.

von $\mathfrak{R}$ klar, daß ein Punkt P von $\mathfrak{R}$ nicht Häufungspunkt von solchen Punkten aus $\mathfrak{M}$ sein kann, die nicht in $\mathfrak{R}_0^m$ liegen. Es kann aber P auch nicht Häufungspunkt von solchen Punkten Q aus $\mathfrak{M}$ sein, die zwar selbst in $\mathfrak{R}_0^m$ liegen, die aber nicht zu $\mathfrak{R}$ gehören, d. h. die keine in $\mathfrak{R}_0^m$ liegende Umgebung $\mathfrak{U}(Q|\mathfrak{M})$ besitzen; denn zu jedem $\varrho > 0$ gäbe es dann einen solchen Punkt Q mit $\overline{PQ} < \frac{1}{2}\varrho$, und zu Q einen nicht in $\mathfrak{R}_0^m$ liegenden Punkt X aus $\mathfrak{M}$ mit $\overline{QX} < \frac{1}{2}\varrho$, also mit $\overline{PX} < \varrho$; es wäre also P Häufungspunkt von nicht zu $\mathfrak{R}_0^m$ gehörigen Punkten X aus $\mathfrak{M}$, was nach dem eben Gesagten nicht sein kann. Ein Punkt P aus $\mathfrak{R}$ kann also tatsächlich nicht Häufungspunkt von $\mathfrak{M} - \mathfrak{R}$ sein, wie behauptet.

Der Beweis von Satz 2 ist damit erbracht.

§ 2.

Die Dimensionszahlen $d(P|M)$ für die Punkte konvexer und im kleinen konvexer Mengen.

7. Ist $\mathfrak{M} = \mathfrak{K}$ speziell eine konvexe Menge, so gilt für jeden Punkt P von $\mathfrak{K}$ die Gleichung [8]):

$$d(P|\mathfrak{K}) = d(\mathfrak{K}). \tag{4}$$

Denn wenn $d(\mathfrak{K}) = m$ und P ein beliebiger Punkt von $\mathfrak{K}$ ist, so gehören zu $\mathfrak{K}$ außer P noch m weitere Punkte $P', \ldots, P^{(m)}$, die mit P zusammen keinem $\mathfrak{R}^{m-1}$ angehören; $\mathfrak{K}$ enthält somit den ganzen von den Punkten $P, P', \ldots, P^{(m)}$ aufgespannten m-dimensionalen Simplex $\mathfrak{E}$ (d. h. für $m = 1$ die Strecke PP'; für $m = 2$ die Dreiecksfläche $PP'P''$; usw.). Wegen $d(P|\mathfrak{E}) = m$ ist also $d(P|\mathfrak{K}) \geqq m$, andererseits gemäß (1) aber auch $d(P|\mathfrak{K}) \leqq m$, woraus $d(P|\mathfrak{K}) = m$, d. h. (4) folgt.

8. Ist eine Menge $\mathfrak{M}$ im Punkte P konvex im kleinen, so gilt für alle Punkte X von $\mathfrak{M}$ in hinlänglicher Nähe von P:

$$d(X|\mathfrak{M}) = d(P|\mathfrak{M}); \tag{5}$$

denn nach Voraussetzung existiert eine konvexe Teilmenge $\mathfrak{K}(P)$ von $\mathfrak{M}$, die für ein geeignetes $\varrho > 0$ alle Punkte X von $\mathfrak{M}$ mit $\overline{PX} < \varrho$ umfaßt, und für diese Punkte X ist also gemäß (4): $d(X|\mathfrak{K}(P)) = d(\mathfrak{K}(P)) = d(P|\mathfrak{K}(P))$, woraus (5) wegen $d(X|\mathfrak{K}(P)) = d(X|\mathfrak{M})$, $d(P|\mathfrak{K}(P)) = d(P|\mathfrak{M})$ folgt.

Für eine Menge $\mathfrak{M}$, die (in jedem Punkte) konvex im kleinen ist, gilt daher: Für jede Zahl m ist die Menge $\mathfrak{M}_m$ der Punkte P von $\mathfrak{M}$,

---

[8]) Bei nicht-konvexen Mengen $\mathfrak{M}$ braucht es, auch wenn $\mathfrak{M}$ zusammenhängend ist, für $n > 2$ überhaupt keinen Punkt P zu geben, der der Gleichung $d(P|\mathfrak{M}) = d(\mathfrak{M})$ genügt. Ist z. B. $\mathfrak{M}$ ein einfacher Polygonzug, so ist $d(P|\mathfrak{M})$ für alle Punkte P von $\mathfrak{M}$ gleich 1 oder (für die Eckpunkte) gleich 2, während $d(\mathfrak{M})$ bis zu n ansteigen kann.

für welche $d(P|\mathfrak{M}) = m$ ist, relativ-offen in $\mathfrak{M}$. Das gleiche gilt von der Menge $\mathfrak{M} - \mathfrak{M}_m$ als Vereinigung der in $\mathfrak{M}$ relativ-offenen Mengen $\mathfrak{M}_\nu$ $(\nu \neq m,\ 0 \leqq \nu \leqq n)$. Es ist also $\mathfrak{M}_m$ nicht nur relativ-offen, sondern zugleich (als relative Komplementärmenge von $\mathfrak{M} - \mathfrak{M}_m$) relativ-abgeschlossen in $\mathfrak{M}$.

9. Ist daher eine im kleinen konvexe Menge $\mathfrak{M}$ zusammenhängend (vgl. [6]), so kann nur eine einzige der Mengen $\mathfrak{M}_\nu$ $(0 \leqq \nu \leqq n)$ nicht leer sein, und es gilt Gleichung (2) für beliebige Punkte P, Q aus $\mathfrak{M}$. Daraus aber folgt nach Satz 2 (Nr. 6) das Bestehen von (3) für jeden Punkt P von $\mathfrak{M}$.

Von einer solchen Menge $\mathfrak{M}$ gilt also, wenn wir $d(\mathfrak{M}) = m$ setzen, daß zu jedem Punkt P von $\mathfrak{M}$ eine konvexe Umgebung $\mathfrak{K}(P|\mathfrak{M})$ existiert, die (wegen $d(P|\mathfrak{M}) = m$) $m+1$ unabhängige Punkte und somit den von ihnen gebildeten m-dimensionalen Simplex enthält. Wird $\mathfrak{M}$ als Menge des $\mathfrak{R}^m$, in dem $\mathfrak{M}$ liegt, betrachtet, so liegen also in jeder Nähe von P innere Punkte der Menge $\mathfrak{M}$. Damit haben wir den für das Spätere wesentlichen

Satz 3. *Bildet man für eine zusammenhängende Menge $\mathfrak{M}$ des $\mathfrak{R}^n$, die konvex im kleinen ist, den ebenen Raum $\mathfrak{R}^m$ niedrigster Dimension m, in dem $\mathfrak{M}$ ganz enthalten ist, und faßt man $\mathfrak{M}$ als Punktmenge des $\mathfrak{R}^m$ auf, dann ist jeder Punkt von $\mathfrak{M}$, sofern er nicht selbst innerer Punkt von $\mathfrak{M}$ ist, sicherlich ein Häufungspunkt von inneren Punkten.*

§ 3.

Abgeschlossene, im kleinen konvexe Mengen.

10. Wir stellen zunächst eine Eigenschaft fest, die jeder beliebigen im kleinen konvexen Menge zukommt. Nennt man eine Menge $\mathfrak{M}$, zu der der Punkt P gehört, *„im Punkte P zusammenhängend“* [9]), wenn es eine zusammenhängende Relativ-Umgebung $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{M})$ gibt, so gilt nämlich: Jede im kleinen konvexe Menge $\mathfrak{M}$ ist in jedem ihrer Punkte P zusammenhängend; das folgt unmittelbar aus der Existenz konvexer $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{M})$, weil jede konvexe Menge zusammenhängend ist.

Nun gilt der folgende Satz über Mengen, die in jedem Punkte zusammenhängend sind:

[9]) Dieser schon bei anderer Gelegenheit von mir verwendete Begriff steht mit dem von H. Hahn und in anderer Ausdrucksweise von St. Mazurkiewicz eingeführten Begriff „zusammenhängend im kleinen“ in enger Beziehung. Vgl. Beiträge zur allgemeinen Topologie I und III, Math. Annalen **88** (1923), S. 297 und Monatshefte für Math. u. Phys. **32** (1924), S. 15.

Satz 4. *Ist $\mathfrak{M}$ eine in jedem ihrer Punkte zusammenhängende Menge und ist $\mathfrak{Q}$ eine „Komponente“*[10]) *von $\mathfrak{M}$, dann kann kein Punkt Q von $\mathfrak{Q}$ Häufungspunkt von Punkten aus $\mathfrak{M} - \mathfrak{Q}$ sein; was man auch so ausdrücken kann: die Komponenten von $\mathfrak{M}$ sind isoliert*[11]).

Beweis: Zugleich mit Q muß auch jede zusammenhängende Umgebung $\mathfrak{U}(Q \mid \mathfrak{M})$ von Q zur Komponente $\mathfrak{Q}$ gehören, da andernfalls die Vereinigungsmenge von $\mathfrak{U}(\mathfrak{Q} \mid \mathfrak{M})$ mit $\mathfrak{Q}$ eine zusammenhängende Teilmenge von $\mathfrak{M}$ wäre, die $\mathfrak{Q}$ als echte Teilmenge umfaßt.

Zufolge Satz 4 gilt speziell:

Satz 5. *Die Komponenten einer im kleinen konvexen Menge sind isoliert (daher selbst konvex im kleinen).*

11. Wir beschränken die folgenden Betrachtungen auf solche im kleinen konvexe Mengen $\mathfrak{M}$ des $\mathfrak{R}^n$, welche zusammenhängend und *abgeschlossen* sind. Das Ergebnis des Satzes 3 von Nr. 9 kann man dann dahin aussprechen, daß es für das Studium solcher Mengen genügt, den Fall zu betrachten, daß die Menge $\mathfrak{M}$ im $\mathfrak{R}^n$ innere Punkte besitzt und daß $\mathfrak{M}$ die abgeschlossene Hülle der Menge $\mathfrak{M}_i$ ihrer inneren Punkte ist ($\mathfrak{M}$ gleich $\mathfrak{M}_i$ vermehrt um alle nicht zu $\mathfrak{M}_i$ gehörigen Häufungspunkte von $\mathfrak{M}_i$). Denn auf diesen Fall kann man jeden anderen zurückführen, indem man n durch eine geeignete kleinere Dimensionszahl m ersetzt.

12. Über Satz 3 hinaus kann man nun aber beweisen:

Satz 6. *Ist $\mathfrak{M}$ eine zusammenhängende, abgeschlossene, im kleinen konvexe Menge, die innere Punkte besitzt, dann ist die Menge $\mathfrak{M}_i$ ihrer inneren Punkte zusammenhängend.*

Beweis. Sei A ein innerer Punkt von $\mathfrak{M}$ und sei $\mathfrak{P}_i$ die Menge aller jener Punkte von $\mathfrak{M}_i$, die sich mit A durch einen ganz in $\mathfrak{M}_i$ verlaufenden Streckenzug verbinden lassen. Satz 6 ist bewiesen, sobald gezeigt ist, daß $\mathfrak{M}_i = \mathfrak{P}_i$, d. h. daß die Menge $\mathfrak{M}_i - \mathfrak{P}_i$ leer ist. Sei $\mathfrak{P}$ die abgeschlossene Hülle von $\mathfrak{P}_i$ (also $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{M}$ enthalten). Jeder Punkt von $\mathfrak{P}$, ob zu $\mathfrak{P}_i$ gehörig oder nicht, ist natürlich Häufungspunkt von $\mathfrak{P}_i$. Sei nun P ein beliebiger Punkt von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{K}(P \mid \mathfrak{M})$ eine konvexe Relativ-Umgebung von P in $\mathfrak{M}$. Für ein geeignetes $\varrho > 0$ umfaßt $\mathfrak{K}(P \mid \mathfrak{M})$ alle Punkte X aus $\mathfrak{M}$ mit $\overline{PX} < \varrho$; speziell umfaßt $\mathfrak{K}(P \mid \mathfrak{M})$ also auch alle

[10]) D. h. (vgl. Hausdorff, loc. cit.[5]) a), S. 245) eine zusammenhängende Teilmenge von $\mathfrak{M}$, die in keiner umfassenderen zusammenhängenden Teilmenge von $\mathfrak{M}$ enthalten ist. Falls $\mathfrak{M}$ selbst zusammenhängend ist, so gibt es nur eine einzige Komponente $\mathfrak{Q} = \mathfrak{M}$ und Satz 4 ist trivial.

[11]) Für nicht in jedem Punkte zusammenhängende Mengen gilt dies ersichtlich nicht. So ist die Menge aller rationalen Punkte einer Geraden ein Beispiel einer Menge mit nicht-isolierten Komponenten (jede Komponente besteht aus einem einzigen Punkt).

Punkte Y aus $\mathfrak{M}_i$ mit $\overline{PY} < \varrho$, und zwar sind diese Punkte innere Punkte von $\mathfrak{K}(P|\mathfrak{M})$. Da $\mathfrak{K}(P|\mathfrak{M})$ konvex ist, lassen sich irgend zwei solche Punkte Y durch eine ganz im Inneren von $\mathfrak{K}(P|\mathfrak{M})$ und somit in $\mathfrak{M}_i$ liegende Strecke verbinden. Da P Häufungspunkt von $\mathfrak{P}_i$ ist, gibt es unter diesen Punkten Y auch solche, die zu $\mathfrak{P}_i$ gehören; und da sich mit diesen Punkten alle anderen Punkte Y durch eine in $\mathfrak{M}_i$ verlaufende Strecke verbinden lassen, so gehören alle Punkte Y aus $\mathfrak{M}_i$ mit $\overline{PY} < \varrho$ zu $\mathfrak{P}_i$. Kein Punkt P aus $\mathfrak{P}$ kann also Häufungspunkt von $\mathfrak{M}_i - \mathfrak{P}_i$ sein. Nun ist (vgl. Nr. 11) $\mathfrak{M}$ die abgeschlossene Hülle von $\mathfrak{M}_i$; $\mathfrak{M}$ ist daher die Vereinigung der abgeschlossenen Hülle $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{P}_i$ und der abgeschlossenen Hülle von $\mathfrak{M}_i - \mathfrak{P}_i$, welch letztere mit $\mathfrak{N}$ bezeichnet werde. Nach dem zuletzt Bewiesenen gehört aber kein Punkt von $\mathfrak{P}$ zugleich auch zu $\mathfrak{N}$. Wäre nun $\mathfrak{M}_i - \mathfrak{P}_i$ und somit $\mathfrak{N}$ nicht leer, so würde $\mathfrak{M} = \mathfrak{P} + \mathfrak{N}$ eine Zerlegung von $\mathfrak{M}$ in zwei punktfremde abgeschlossene (also relativ in $\mathfrak{M}$ abgeschlossene) echte Teilmengen darstellen, entgegen der Voraussetzung, daß $\mathfrak{M}$ zusammenhängend ist. Somit ist $\mathfrak{M}_i - \mathfrak{P}_i$ leer, wie behauptet.

13. Nunmehr ließe sich Satz 1 unter Berufung auf den Satz beweisen[12]), daß eine Menge $\mathfrak{M}$ des $\mathfrak{R}^n$ dann konvex ist, wenn 1. $\mathfrak{M}$ die abgeschlossene Hülle von $\mathfrak{M}_i$ ist, 2. $\mathfrak{M}_i$ zusammenhängend ist und wenn 3. durch jeden Randpunkt von $\mathfrak{M}$ eine Stützstrecke an $\mathfrak{M}$ (für $n = 2$) bzw. eine $(n-1)$-dimensionale Stützscheibe geht. Denn aus den in Satz 1 über $\mathfrak{M}$ gemachten Voraussetzungen folgt gemäß Nr. 11, daß (nachdem man nötigenfalls $\mathfrak{R}^n$ durch einen ebenen Teilraum ersetzt hat) $\mathfrak{M}$ im $\mathfrak{R}^n$ (bzw. im fraglichen Teilraum) innere Punkte besitzt und gleich der abgeschlossenen Hülle der Menge $\mathfrak{M}_i$ ihrer inneren Punkte ist, daß also die eben genannte Bedingung 1 erfüllt ist; Bedingung 2 folgt dann gemäß Satz 6 und die Bedingung 3 aus der Konvexheit im kleinen.

Doch wäre ein solcher Beweis von Satz 1 ein Umweg. Denn mit analogen Überlegungen wie loc. cit. der angeführte Satz, läßt sich Satz 1 direkt beweisen (s. §§ 4, 5).

§ 4.

Beweis von Satz 1 im zweidimensionalen Fall.

14. Sei $n = 2$ und $\mathfrak{M}$ eine abgeschlossene, zusammenhängende, im kleinen konvexe Menge des $\mathfrak{R}^2$, von der wir gemäß Nr. 11 voraussetzen können, daß sie innere Punkte besitzt. Die Behauptung des Satzes 1, daß $\mathfrak{M}$ konvex ist, wird gezeigt sein, wenn wir beweisen, daß die Menge $\mathfrak{M}_i$ der inneren Punkte von $\mathfrak{M}$ konvex ist. Nun ist die offene Menge $\mathfrak{M}_i$ nach Satz 6 zusammenhängend und es gibt also zu irgend zwei Punkten

[12]) Vgl. loc. cit. [2]) a) die Sätze in den dortigen Nrn. 2, 3 nebst Zusatz in Nr. 5.

A, B von $\mathfrak{M}_i$ einen sie verbindenden, ganz in $\mathfrak{M}_i$ verlaufenden Streckenzug $AC_1 \ldots C_{k-1} C_k B$. Offenbar genügt es nun für den Fall $k = 1$ eines aus zwei Strecken bestehenden Streckenzuges ACB nachzuweisen, daß zugleich mit diesem Streckenzug auch die Strecke AB in $\mathfrak{M}_i$ liegen muß. Ist nämlich dieser Fall erledigt, so folgt aus dem Vorhandensein eines in $\mathfrak{M}_i$ liegenden Streckenzuges $AC_1 \ldots C_{k-1} C_k B$ sofort, daß (zugleich mit dem Streckenzug $C_{k-1} C_k B$) auch die Strecke $C_{k-1} B$, also der Streckenzug $AC_1 \ldots C_{k-1} B$ in $\mathfrak{M}_i$ liegen muß; und die Fortsetzung dieses Schlusses ergibt, daß auch die Strecke AB in $\mathfrak{M}_i$ liegen muß, $\mathfrak{M}_i$ also konvex ist.

15. Sei also ACB ein in $\mathfrak{M}_i$ liegender Streckenzug. Falls A, B, C in einer Geraden liegen, ist unsere Behauptung, daß AB in $\mathfrak{M}_i$ liegt, klar. Es liege also C nicht auf der Geraden AB. Angenommen nun, die Strecke AB gehörte nicht ganz zu $\mathfrak{M}_i$, so könnten wir auf der Strecke CB einen variablen Punkt X von C nach B so lange wandern lassen, bis zum ersten Male die Strecke AX nicht ganz in $\mathfrak{M}_i$ liegt. Es möge das für die Lage X_0 des Punktes X eintreten, wobei X_0 entweder zwischen C und B liegt oder $X_0 = B$ ist. Das Innere des Dreieckes ACX_0 (einschließlich der Seiten AC und CX_0, besteht dann noch ganz aus Punkten von $\mathfrak{M}_i$, auf der Seite AX_0 aber gibt es wenigstens einen Punkt der Begrenzung von $\mathfrak{M}$. Sei P der unter allen diesen Begrenzungspunkten von $\mathfrak{M}$ auf AX_0 am nächsten an A gelegene. Nun werden wir sofort sehen, daß der Punkt P keine konvexe Relativ-Umgebung in $\mathfrak{M}$ haben kann, daß unsere Annahme, die Strecke AB gehöre nicht zu $\mathfrak{M}_i$, also zu einem Widerspruch mit der Voraussetzung führt, daß $\mathfrak{M}$ konvex im kleinen ist.

Daß der unter unserer Annahme konstruierte Punkt P aber keine konvexe Relativ-Umgebung in $\mathfrak{M}$ haben kann, ergibt sich so: Sei $\varrho > 0$ beliebig gewählt. Da alle zwischen A und P gelegenen Punkte der Geraden $g = AX_0$ dem Inneren von $\mathfrak{M}$ angehören, so gibt es auch auf derjenigen Seite von g, auf der C nicht liegt, in jeder Nähe von P Punkte von $\mathfrak{M}$. Sei Y ein solcher Punkt mit $YP < \varrho$. Dann führt die Verlängerung der Strecke YP über P hinaus ins Innere des Dreiecks ACX_0 und wir können im Dreiecksinnern (also zu $\mathfrak{M}$ gehörig) auf verschiedenen Seiten der Geraden YP zwei Punkte Y', Y'' so wählen, daß $Y'P < \varrho$, $Y''P < \varrho$. Eine alle Punkte Z aus $\mathfrak{M}$ mit $ZP < \varrho$ umfassende Umgebung $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{M})$ müßte dann Y, Y' und Y'' enthalten; wäre sie konvex, so enthielte sie die ganze Dreiecksfläche $Y\,Y'\,Y''$, in deren Innerem P liegt, und P läge im Inneren von $\mathfrak{M}$ entgegen der Konstruktion von P [13]).

[13]) Wir haben unseren Satz bewiesen, indem wir aus der Annahme, $\mathfrak{M}_i$ sei nicht konvex, auf die Existenz eines Punktes P von $\mathfrak{M}$ mit nicht-konvexer Umgebung $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{M})$ schließen konnten. Wir hätten auch durch analoge Verfahren, wie ich sie beim

§ 5.

Beweis von Satz 1 im n-dimensionalen Fall ($n > 2$).

16. Sei $\mathfrak{M}$ eine den Voraussetzungen des Satzes 1 genügende Menge des $\mathfrak{R}^n$ mit inneren Punkten ($n > 2$). Es genügt wieder zu beweisen, daß die Menge $\mathfrak{M}_i$ ihrer inneren Punkte konvex ist.

Da $\mathfrak{M}_i$ nach Satz 6 zusammenhängend ist, so lassen sich irgend zwei ihrer Punkte A, B durch einen Streckenzug $AC_1 \dots C_k B$ in $\mathfrak{M}_i$ verbinden. Es genügt (vgl. Nr. 14) für den Fall $k = 1$ eines aus zwei Strecken bestehenden Streckenzugs ACB nachzuweisen, daß zugleich mit diesem Streckenzug die Strecke AB ganz in $\mathfrak{M}_i$ liegen muß. Wir brauchen dabei nur den Fall zu betrachten, daß C nicht auf der Geraden AB liegt.

Sei $\mathfrak{D}^{(2)}$ der Durchschnitt $\mathfrak{M}_i \mathfrak{E}$ von $\mathfrak{M}_i$ mit der durch die Punkte A, B, C bestimmten Ebene $\mathfrak{R}^2 = \mathfrak{E}$. Sei ferner $\mathfrak{M}^{(2)}$ die abgeschlossene Hülle von $\mathfrak{D}^{(2)}$. Es ist also $\mathfrak{M}^{(2)}$ sicher als Teilmenge im Durchschnitt $\mathfrak{M}\mathfrak{E}$ von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{E}$ enthalten. Wir wollen zeigen, daß $\mathfrak{M}^{(2)}$ konvex im kleinen ist[14]). Sei P ein Punkt von $\mathfrak{M}^{(2)}$ (also von $\mathfrak{M}$) und sei $\mathfrak{K}(P|\mathfrak{M})$ eine konvexe Relativ-Umgebung von P in $\mathfrak{M}$, die für ein geeignetes $\varrho > 0$ alle Punkte X aus $\mathfrak{M}$ mit $\overline{PX} < \varrho$ umfaßt. Da die Menge $\mathfrak{K}_\varrho$ aller Punkte X des $\mathfrak{R}^n$ mit $\overline{PX} < \varrho$ ebenfalls konvex ist, so ist es auch der Durchschnitt $\mathfrak{K}_\varrho(P|\mathfrak{M})$ von $\mathfrak{K}(P|\mathfrak{M})$ mit $\mathfrak{K}_\varrho$ und es ist also $\mathfrak{K}_\varrho(P|\mathfrak{M})$ selbst eine konvexe Relativ-Umgebung von P in $\mathfrak{M}$. Der Punkt P ist, ob zu $\mathfrak{D}^{(2)}$ gehörig oder nicht[15]),

---

Beweis des in Nr. 13 genannten Satzes (loc. cit.[2]) a), [dortige Nr. 2]) zur Konstruktion eines Randpunktes P''' von $\mathfrak{M}$ ohne Stützstrecke angegeben habe, unter der Annahme, die Menge $\mathfrak{M}$ sei nicht konvex, also von ihrer konvexen Hülle verschieden, einen Randpunkt von $\mathfrak{M}$ mit nicht-konvexer Umgebung $\mathfrak{U}(P\ \mathfrak{M})$ konstruieren können. Wesentlich einfacher aber ist die oben mitgeteilte Schlußweise, die ich einer freundlichen Mitteilung von Herrn Prüfer verdanke, — einer Mitteilung, die auf eine Vereinfachung des loc. cit. mitgeteilten Beweises abzielte, aber auch im vorliegenden Falle verwertbar ist.

[14]) Diese Behauptung wäre unmittelbar klar, wenn wir schon wüßten (was sich am Schlusse aus der Konvexheit von $\mathfrak{M}$ folgern läßt), daß $\mathfrak{M}^{(2)} = \mathfrak{M}\mathfrak{E}$ ist; denn da $\mathfrak{E}$ (weil konvex) konvex im kleinen ist, so ist es auch $\mathfrak{M}\mathfrak{E}$ als Durchschnitt zweier im kleinen konvexer Mengen.

[15]) Im letzteren Falle muß P Randpunkt von $\mathfrak{K}_\varrho(P\ \mathfrak{M})$ sein (andernfalls wäre ja P innerer Punkt von $\mathfrak{M}$, also zu $\mathfrak{D}^{(2)}$ gehörig); wenn nun D einen Punkt von $\mathfrak{D}^{(2)}$ mit $\overline{DP} < \varrho$ und E einen Punkt auf der Verlängerung der Strecke DP über P hinaus mit $\overline{PE} < \varrho$ bedeutet, so gehören die Punkte zwischen D und P (einschl. D) dem Inneren der konvexen Menge $\mathfrak{K}_\varrho(P\ \mathfrak{M})$, jene zwischen P und E (einschl. E) daher dem Äußeren an; die letzteren Punkte gehören also nicht zu $\mathfrak{K}_\varrho(P\ \mathfrak{M})$, also nicht zu $\mathfrak{M}$ und nicht zu $\mathfrak{M}^{(2)}$. Somit ist P nicht innerer Punkt, sondern Randpunkt von $\mathfrak{M}^{(2)}$. *Jeder innere Punkt von $\mathfrak{M}^{(2)}$ gehört also zu $\mathfrak{D}^{(2)}$.* (Aus dem bloßen Umstande, daß $\mathfrak{M}^{(2)}$ die abgeschlossene Hülle von $\mathfrak{D}^{(2)}$ ist, würde dies natürlich noch nicht folgen.)

jedenfalls Häufungspunkt von $\mathfrak{D}^{(2)}$. Irgend zwei Punkte X_1, X_2 von $\mathfrak{D}^{(2)}$ mit einem Abstand $< \varrho$ von P gehören zu $\mathfrak{K}_\varrho(P|\mathfrak{M})$, und zwar als innere Punkte; es liegt also auch die ganze Verbindungsstrecke $X_1 X_2$ im Inneren von $\mathfrak{K}_\varrho(P|\mathfrak{M})$ und daher in $\mathfrak{M}_i$ und in $\mathfrak{D}^{(2)}$. Somit ist die Menge der Punkte X von $\mathfrak{D}^{(2)}$ mit $\overline{PX} < \varrho$ konvex, und daher ist es auch die Menge der Punkte X von $\mathfrak{M}^{(2)}$ mit $PX < \varrho$. Diese Menge bildet somit eine konvexe Relativ-Umgebung $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{M}^{(2)})$ von P in $\mathfrak{M}^{(2)}$: Es ist $\mathfrak{M}^{(2)}$ konvex im kleinen, wie behauptet.

17. Gemäß Satz 5 (Nr. 10) folgt hieraus, daß auch diejenige Komponente $\mathfrak{M}_0^{(2)}$ von $\mathfrak{M}^{(2)}$, die die Punkte A, B, C enthält, konvex im kleinen ist. Natürlich ist $\mathfrak{M}_0^{(2)}$ als Komponente einer abgeschlossenen Menge selbst abgeschlossen, sowie (als Komponente einer Menge) zusammenhängend. $\mathfrak{M}_0^{(2)}$ besitzt ferner (als ebene Menge aufgefaßt) innere Punkte, zum Beispiel A, B, C. Da somit $\mathfrak{M}_0^{(2)}$ die Voraussetzungen des Satzes 1 für den in § 4 erledigten zweidimensionalen Fall erfüllt, ist $\mathfrak{M}_0^{(2)}$ konvex. Daher ist auch die Menge $\mathfrak{M}_{0i}^{(2)}$ der inneren Punkte von $\mathfrak{M}_0^{(2)}$ konvex. Zugleich mit den Punkten A, B gehört also die ganze Verbindungsstrecke AB zu $\mathfrak{M}_{0i}^{(2)}$ und daher (vgl. [15])) zu $\mathfrak{D}^{(2)}$ und daher zu $\mathfrak{M}_i$, wie zu beweisen war.

München, den 9. November 1927.

(Eingegangen am 12. November 1927.)

Bestimmung der Perioden gewisser Integrale durch die Theorie der Klassenkörper.

Von

E. Hecke in Hamburg.

Unter einem Integral erster Gattung der Stufe N versteht man in der Theorie der elliptischen Modulfunktionen eine analytische Funktion $f(\tau)$ der komplexen Variablen τ, welche im Innern der oberen Halbebene regulär ist, ferner bei allen Substitutionen der Hauptkongruenzgruppe $\Gamma(N)$ der Stufe N sich nur um additive Konstanten ändert, d. h.

$$f\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = f(\tau) + \text{konst.},$$

wenn

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (\mathrm{mod}\, N),$$

und welche schließlich auch in den rationalen Punkten der reellen Achse sich regulär in den betreffenden Ortsuniformisierenden verhält. Die Anzahl der linear unabhängigen Integrale der Stufe N ist gleich dem Geschlecht des algebraischen, durch die Gruppe $\Gamma(N)$ definierten Gebildes, welches bekanntlich den Wert hat:

$$p(N) = 1 + \frac{\sigma(N)\cdot(N-6)}{12}, \qquad \sigma(N) = \frac{N^2}{2} \prod_{p/N} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \qquad (N \geqq 3).$$

Hier ist $\sigma(N)$ die Anzahl der nach $\Gamma(N)$ nicht-äquivalenten rationalen Punkte; p durchläuft die verschiedenen Primteiler von N.

Eine allgemeine Theorie dieser Integrale und ihrer Perioden, etwa mit dem Ziel, von diesen Perioden her das algebraische Gebilde durch seine transzendenten Moduln zu bestimmen, liegt bisher noch nicht vor. Die einzigen Aussagen über beliebige (Primzahl-) Stufen sind in der Hurwitzschen Theorie der Modularkorrespondenzen enthalten, aus der sich ergibt, daß das betreffende algebraische Gebilde unter denen desselben Geschlechtes in hohem Maße „singulär“ sein muß. Außerdem liegen noch Resultate über einige Stufenzahlen $N \leqq 10$ vor, deren Herleitung aber

keine Vermutung darüber gestattet, ob ähnliche Verhältnisse bei beliebigen Stufenzahlen herrschen werden.

In dieser Arbeit werde ich nun für eine gewisse Kategorie von Integralen, die ein besonders einfaches Bildungsgesetz haben, die Perioden diskutieren. Es stellt sich für diese ein unerwarteter Zusammenhang mit der Theorie der komplexen Multiplikation heraus[1]). Die Heranziehung der tieferen algebraischen Eigenschaften der Körper der komplexen Multiplikation gestattet einen genauen Einblick in die Periodensysteme dieser Integrale. Als Hauptresultat ergibt sich insbesondere für alle Primzahlstufen q, wo $q \equiv 3 \pmod 4$, $q > 3$:

Für jede solche Stufe existieren $\frac{q-1}{2}$ Systeme von je h Integralen erster Gattung, wobei h die Klassenzahl des Zahlkörpers $K(\sqrt{-q})$ ist, mit folgenden Eigenschaften: Sämtliche Perioden dieser — übrigens linear unabhängigen — Integrale sind algebraische Zahlen und gehören dem absoluten Klassenkörper von $K(\sqrt{-q})$ an. Die simultanen Perioden jedes dieser h-gliedrigen Systeme sind stets konjugierte Zahlen dieses Körpers in bezug auf $K(\sqrt{-q})$. In jedem System ist ferner mindestens eine Linearkombination enthalten, deren sämtliche Perioden bereits Zahlen des quadratischen Körpers $K(\sqrt{-q})$ sind.

Überdies enthält eines der Systeme lediglich Integrale, welche bereits der Gruppe $\Gamma_0^0(q)$ zugehörig sind[2]), und die Schar aller erwähnten $h \cdot \frac{q-1}{2}$ Integrale besteht aus den (in bezug auf die volle Modulgruppe) konjugierten Integralen dieses speziellen Systems.

Als Folgerung ist hervorzuheben, daß also stets mindestens $\frac{q-1}{2}$ elliptische Integrale für die Stufe q existieren.

Der Beweis verläuft so, daß gezeigt wird: gewisse $\frac{q-1}{2}$ Integrale erster Gattung, welche sich bei beliebigen Modulsubstitutionen linear transformieren gemäß einer bekannten, von F. Klein entdeckten Gruppe von $\frac{q(q^2-1)}{2}$ Substitutionen in $\frac{q-1}{2}$ Variablen, besitzen Perioden, die sich als Werte elliptischer Modulfunktionen für „singuläre“ Argumente herausstellen. Sie sind Zahlen des Teilungskörpers für den Führer $\sqrt{-q}$ in bezug auf $K(\sqrt{-q})$. Dieser Körper kann aber aus dem absoluten Klassenkörper von $K(\sqrt{-q})$ auch durch Adjunktion der q-ten Einheitswurzeln erzeugt

---

[1]) Die komplexe Multiplikation kommt durch den analytischen Ausdruck für die Größen $P(\varrho)$ und seine Berechnung durch die Gleichungen (7), (8) hinein.

[2]) Mit $\Gamma_0^0(q)$ bezeichne ich die Gruppe der Modulsubstitutionen $\tau' = \frac{a\tau + b}{t\tau + d}$, wo $b \equiv c \equiv 0 \pmod q$ ist.

werden. Die genauere Analyse dieses Zusammenhanges, wobei die neuen Resultate von Herrn Hasse[3]) aus der Theorie der komplexen Multiplikation entscheidend benutzt werden, führt dann dazu, daß gewisse lineare Verbindungen der $\frac{q-1}{2}$ Integrale Perioden aus dem absoluten Klassenkörper besitzen müssen. Als Nebenresultat ergibt sich weiter eine bisher nicht bekannte Darstellung der Kleinschen Gruppe mit Koeffizienten allein aus $K(\sqrt{-q})$.

In § 1, Gl. (3) werden die zu untersuchenden Integrale durch ihre Potenzreihenentwicklung auch für zusammengesetzte Stufe definiert. Es sind binäre Thetareihen, wo der Exponent des allgemeinen Gliedes eine ganzzahlige definite binäre quadratische Form der Summationsbuchstaben ist. Ihre Funktionaleigenschaften sind bekannt. Es wird dann gezeigt, daß die hieraus entstehenden Integrale Perioden besitzen, welche einem algebraisch genau definierten Teilungskörper aus der Theorie der komplexen Multiplikation angehören. In § 2 werden dann diese Resultate für den speziellen Fall der Primzahlstufe verschärft und gleichzeitig auf einfacherem Wege noch einmal bewiesen. In § 3 wird dann gezeigt, daß durch eine geeignete lineare Transformation der vorliegenden Integrale der Rationalitätsbereich der Perioden in den des absoluten Klassenkörpers an Stelle der Teilungskörper verwandelt werden kann.

Es sei noch bemerkt, daß die Bestimmung der Perioden eines gegebenen Integrals zwei verschiedenartige Teilprobleme involviert: a) die Bestimmung des gesamten Periodengitters — davon allein ist in der vorliegenden Arbeit die Rede — und b) die Bestimmung der Periode, die zu einer vorgegebenen Substitution der Gruppe $\Gamma(N)$ gehört. Die Fragestellung b) ist die für die Anwendungen auf Arithmetik in Betracht kommende; die Art der hier vorliegenden Beziehungen läßt sich aus der entsprechenden Frage bei den Integralen dritter Gattung erkennen, wo sich die Perioden als Faktoren von Klassenzahlen bisher unzugänglicher Zahlkörper herausstellen[4]).

Eine Theorie der allgemeinsten Integrale erster Gattung erfordert das Studium derjenigen endlichen Gruppe linearer Substitutionen, welche die p Integrale bei beliebigen Modulsubstitutionen erfahren. Mit den Methoden der algebraischen Gruppentheorie läßt sich in der Tat, wie ich an anderer Stelle zeigen werde, diese Gruppe für eine beliebige Primzahlstufe völlig bestimmen.

---

[3]) H. Hasse, Neue Begründung der komplexen Multiplikation, Crelles Journal **157** (1927), S. 116 ff.

[4]) Vgl. meine Arbeit: Darstellung von Klassenzahlen als Perioden von Integralen dritter Gattung ..., Abh. aus d. Math. Seminar Hamburg **4** (1925), S. 211.

§ 1.

Definition und Haupteigenschaften der Integrale für beliebige zusammengesetzte Stufenzahlen.

Die Ableitung eines Integrals erster Gattung nach τ ist eine ganze Modulform der Dimension -2 und der Stufe N, welche in allen rationalen Punkten verschwindet. Umgekehrt entsteht durch Integration einer derartigen Form (-2)-ter Dimension stets ein Integral erster Gattung. Die Formen (-2)-ter Dimension, welche der folgenden Untersuchung zugrunde liegen, sind durch folgende[5]) binäre Thetareihen definiert:

In einem imaginär-quadratischen Körper mit der Diskriminante D sei $\mathfrak{a}$ ein beliebiges ganzes, von Null verschiedenes Ideal mit der Norm A, ferner ϱ eine ganze, durch $\mathfrak{a}$ teilbare Zahl des Körpers, endlich Q eine natürliche Zahl. Man bilde nun die unendliche Reihe

$$(1) \qquad \vartheta_2(\tau;\, \varrho,\, \mathfrak{a},\, Q\sqrt{D}) = \sum_{\mu \equiv \varrho\, (\mathfrak{a}\, Q\sqrt{D})} \mu e^{2\pi i \tau \frac{\mu\mu'}{A\,Q\,|D|}},$$

worin der Summationsbuchstabe μ alle ganzen Zahlen des Körpers[6]) durchlaufen soll, welche die Kongruenz erfüllen. Diese Reihe konvergiert für alle τ der oberen Halbebene und stellt eine ganze Modulform der Dimension -2 und der Stufe $|QD|$ vor, welche überdies in allen rationalen Punkten verschwindet, also durch Integration nach τ ein Integral erster Gattung der Stufe $|QD|$ definiert (soweit es nicht identisch verschwindet). Ihr Verhalten bei den erzeugenden Substitutionen der Modulgruppe $\tau' = \tau + 1$ und $\tau' = -\frac{1}{\tau}$ wird durch folgende Gleichungen beschrieben:

$$\vartheta_2(\tau+1;\, \varrho,\, \mathfrak{a},\, Q\sqrt{D}) = \varepsilon^{\frac{\varrho\varrho'}{A}} \vartheta_2(\tau;\, \varrho,\, \mathfrak{a},\, Q\sqrt{D}),$$

$$(2) \qquad \frac{\vartheta_2\left(\frac{-1}{\tau};\, \varrho,\, \mathfrak{a},\, Q\sqrt{D}\right)}{\tau^2} = \frac{1}{Q\sqrt{D}} \sum_{\substack{\alpha \bmod \mathfrak{a}\, Q\sqrt{D} \\ \alpha \equiv 0\,(\mathfrak{a})}} \varepsilon^{-S\left(\frac{\alpha'\varrho}{A}\right)} \vartheta_2(\tau;\, \alpha,\, \mathfrak{a},\, Q\sqrt{D}).$$

In der Summe durchläuft α ein volles System inkongruenter Zahlen mod $\mathfrak{a}\, Q\sqrt{D}$, die $\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,\mathfrak{a})$ sind. Das Zeichen $S(\omega)$ bedeutet die Spur $\omega + \omega'$ im Körper und

$$\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{Q|D|}}; \qquad \sqrt{D} \text{ ist positiv imaginär.}$$

---

[5]) Die genauere Untersuchung dieser Reihen habe ich in den Math. Ann. **97** (1926), S. 210 durchgeführt.

[6]) Der Akzent an Zahlen aus $K(\sqrt{D})$ bedeutet stets den Übergang zur konjugierten Zahl.

Gehen wir nun zu den Integralen über und setzen

$$(3)\quad \begin{aligned} j(\tau;\varrho,\mathfrak{a},Q\sqrt{D}) &= \frac{2\pi i}{AQ|D|}\int_{\infty}^{\tau}\vartheta_2(\tau;\varrho,\mathfrak{a},Q\sqrt{D})\,d\tau \\ &= \sum_{\mu\equiv\varrho(\mathfrak{a}Q\sqrt{D})}\frac{1}{\mu'}e^{2\pi i\tau\frac{\mu\mu'}{AQ|D|}} \quad (\varrho\not\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,\mathfrak{a}Q\sqrt{D})), \end{aligned}$$

so folgt aus (2)

$$(4)\quad \begin{aligned} j(\tau+1;\varrho,\mathfrak{a},Q\sqrt{D}) &= \varepsilon^{\frac{\varrho\varrho'}{A}}j(\tau;\varrho,\mathfrak{a},Q\sqrt{D}), \\ j\left(-\frac{1}{\tau};\varrho,\mathfrak{a},Q\sqrt{D}\right) &= \frac{1}{Q\sqrt{D}}\sum_{\substack{\alpha\,\mathrm{mod.}\,\mathfrak{a}Q\sqrt{D}\\ \alpha\equiv 0(\mathfrak{a})}}\varepsilon^{-\varphi\left(\frac{\alpha'\varrho}{A}\right)}j(\tau;\alpha,\mathfrak{a},Q\sqrt{D})+P(\varrho), \end{aligned}$$

wo die für das Folgende ausschlaggebenden Zahlen $P(\varrho)$ konstante, von τ unabhängige Größen sind, die nur von $\varrho, \mathfrak{a}, Q\sqrt{D}$ abhängen. Ihre Bestimmung soll nun vorgenommen werden.

Zunächst ist zu bemerken, daß $j(\tau;\varrho\ldots)$ und $P(\varrho)$ nach Definition sich nicht ändern, wenn ϱ durch eine $\mathrm{mod}\,\mathfrak{a}Q\sqrt{D}$ kongruente Zahl ersetzt wird. Ferner ist

$$j(\tau;-\varrho,\ldots) = -j(\tau;\varrho\ldots),$$
$$P(-\varrho) = -P(\varrho).$$

Wenn also

$$2\varrho\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,\mathfrak{a}Q\sqrt{D}),$$

so verschwindet $j(\tau;\varrho\ldots)$ identisch und auch $P(\varrho)=0$.

Für eine beliebige Modulsubstitution $S=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ folgt dann aus (4)

$$(5)\quad j(S\tau;\varrho,\mathfrak{a},Q\sqrt{D}) = \sum_{\substack{\alpha\,\mathrm{mod}\,\mathfrak{a}Q\sqrt{D}\\ \alpha\equiv 0(\mathfrak{a})}}A_S(\varrho,\alpha)j(\tau;\alpha,\mathfrak{a},Q\sqrt{D})+C_S(\varrho),$$

wo

$$(6)\quad C_S(\varrho) = \sum_{\substack{\alpha\,\mathrm{mod}\,\mathfrak{a}Q\sqrt{D}\\ \alpha\equiv 0(\mathfrak{a})}}G_S(\varrho,\alpha)P(\alpha).$$

Hier sind $A_S(\varrho,\alpha)$ und $G_S(\varrho,\alpha)$ ganze rationale Ausdrücke in ε und $\frac{1}{Q\sqrt{D}}$ mit ganzen rationalen Koeffizienten, die nur von S,ϱ,α abhängen. Ist insbesondere S eine Substitution der Gruppe $\Gamma(Q|D|)$, so ist der homogene Bestandteil in (5) gleich $j(\tau;\varrho,\mathfrak{a},Q\sqrt{D})$, da es sich nach dem früher[3]) bewiesenen um Integrale der Stufe $Q|D|$ handelt, und es wird dann

$$j(S\tau;\varrho,\mathfrak{a},Q\sqrt{D}) = j(\tau;\varrho,\mathfrak{a},Q\sqrt{D}+C_S(\varrho),$$

worin also die zu S gehörige „Periode“ $C_S(\varrho)$ die Gestalt (6) besitzt. Mithin gilt

Satz 1. *Für festes* $\mathfrak{a}, Q\sqrt{D}$ *haben die durch* (3) *definierten Integrale erster Gattung der Stufe* $Q|D|$, *unter denen es höchstens* $Q^2|D|$ *linear unabhängige gibt, nur solche Perioden, welche sich linear homogen durch die* $Q^2|D|$*-Größen* $P(\varrho)$ *mit Koeffizienten aus dem Körper der* $|QD|$*-ten Einheitswurzeln ausdrücken lassen.*

Der Wert von $P(\varrho)$ ergibt sich nun aus (4), wenn wir den Imaginärteil von τ über alle Grenzen wachsen lassen und berücksichtigen, daß nach Definition alle $j(\tau)$ im Punkte $i\infty$ verschwinden:

$$(7) \qquad P(\varrho) = j(0; \varrho, \mathfrak{a}, Q\sqrt{D}) = \lim_{x=1} \sum_{\mu \equiv \varrho (\mathfrak{a} Q\sqrt{D})} \frac{x^{\mu\mu'}}{\mu'},$$

wobei x über reelle Werte wachsend gegen 1 konvergieren soll. Die Summe der divergenten Reihe

$$\sum \frac{1}{\mu'},$$

welche durch den obigen Grenzprozeß definiert ist (d. h. Summation durch Potenzreihen) läßt sich aber ebenso vermöge Summation durch Dirichletsche Reihen gewinnen:

$$(8) \qquad \lim_{x=1} \sum \frac{x^{\mu\mu'}}{\mu'} = \Big(\sum_{\mu \equiv \varrho (\mathfrak{a} Q\sqrt{D})} \frac{1}{\mu' |\mu|^s} \Big)_{s=0},$$

wobei das Zeichen $(\ldots)_{s=0}$ den Wert der in der Klammer stehenden analytischen Funktion von s für $s = 0$ bedeuten soll. Die Richtigkeit dieser Gl. (8) ergibt sich sofort, wenn man die dort auftretende Dirichletsche Reihe, welche für $R(s) > 1$ absolut konvergent ist, mittels des Γ-Integrals auf die Potenzreihe zurückführt, und dadurch unter Benutzung der Funktionaleigenschaft (4) als in die ganze s-Ebene fortsetzbar erkennt. Man kann auf einen bekannten Sachverhalt am einfachsten kommen, wenn man bedenkt, daß

$$\sum \frac{1}{\mu' |\mu|^s} = \sum \frac{\mu}{|\mu|} \frac{1}{|\mu|^{s+1}}$$

ja die Funktion $\zeta\left(\frac{s+1}{2}; \lambda\right)$ aus dem Körper $K(\sqrt{D})$ ist, gebildet mit dem Größencharakter $\lambda(\mu) = \frac{\mu}{|\mu|}$. Für das Folgende ist aber eine Zurückführung auf eine Reihe aus der Theorie der elliptischen Modulfunktionen notwendig, woraus die Gl. (8) dann auch folgt: Ist ω_1, ω_2 eine Basis des Ideals $\mathfrak{a}$ in $K(\sqrt{D})$, deren Determinante negativ imaginär ist, so ist, zunächst für $\Re(s) > 1$,

$$\sum_{\mu' \equiv \varrho\,(\mathfrak{a}\,Q\sqrt{D})} \frac{1}{\mu' \,|\, \mu}^{s} = \sum_{\substack{m_2 \equiv r_2 \\ m_1 \equiv r_1}\,(\mathrm{mod}\,Q\,D)} \frac{-\sqrt{D}\cdot|\,D\,|^{\frac{s}{2}}}{(m_1\omega_1' + m_2\omega_2')\,|\,m_1\omega_1' + m_2\omega_2'\,|^{s}},$$

wo gesetzt ist

$$\varrho\sqrt{D} = r_1\omega_1 + r_2\omega_2 \quad \text{mit ganzen rationalen } r_1, r_2.$$

Die hier auftretende Reihe ist aber nichts anderes als eine verallgemeinerte Eisenstein-Reihe, wie ich sie systematisch für frei veränderliches $\frac{\omega_1'}{\omega_2'}$ mit positivem Imaginärteil[7]) bereits untersucht habe. Ihr Wert bei $s = 0$ ist die Eisensteinsche Reihe der Dimension -1, welche mit den Teilwerten der Weierstraßschen ζ-Funktion zusammenhängt, für das homogene Argumentpaar (ω_1', ω_2'). So ergibt sich endlich

$$(10) \qquad P(\varrho) = P\Big(\frac{r_1\omega_1 + r_2\omega_2}{\sqrt{D}}\Big) = -\sqrt{D}\,G_1(\omega_1', \omega_2';\, r_1, r_2, Q\,|\,D\,|),$$

wo

$$G_1(\tau, 1;\, r_1, r_2, N) = \sum_{m_i \equiv r_i\,(N)} \frac{1}{(m_1\tau + m_2)\,|\,m_1\tau + m_2\,|^{s}}\Big|_{s=0}$$

eine ganze elliptische Modulform der Dimension -1 und der Stufe N ist.

Von dieser Modulform habe ich folgende Eigenschaften bewiesen[7]):

Die Funktion

$$\frac{1}{2\pi i}\,G_1(\tau, 1;\, r_1, r_2, N)$$

hat eine Entwickelung nach nicht-negativen Potenzen von $e^{\frac{2\pi i\tau}{N}}$, deren Koeffizienten Zahlen aus dem Körper der N-ten Einheitswurzeln sind.

Für jede beliebige Modulsubstitution ist

$$\frac{G_1\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d},\, 1;\, r_1, r_2, N\right)}{c\tau+d} = G_1(\tau, 1;\, ar_1 + cr_2, br_1 + dr_2, N).$$

So erscheinen die Perioden $P(\varrho)$ als Werte von elliptischen Modulformen für Argumente, welche dem imaginär-quadratischen Zahlkörper $K(\sqrt{D})$ angehören, und auf diese Weise ist der Zusammenhang mit der komplexen Multiplikation gegeben.

Wir werden jetzt folgenden Satz beweisen:

Satz 2. *Durch Multiplikation mit einem passenden von Null verschiedenen gemeinsamen Faktor λ läßt sich erreichen, daß die Zahlen $\lambda P(\varrho)$ für alle ϱ (bei festem $\mathfrak{a}$ $Q\sqrt{D}$) dem Teilungskörper der elliptischen Funktionen für den Modul $Q\sqrt{D}$ in bezug auf den Körper $K(\sqrt{D})$ angehören, also algebraische Zahlen werden.*

[7]) Theorie der Eisensteinschen Reihen höherer Stufe ... Abh. a. d. Math. Seminar Hamburg **5** (1927), S. 213.

Hierzu genügt es, zu zeigen, daß der Quotient von zwei der Zahlen $P(\varrho)$, die von Null verschieden sind, stets dem erwähnten Teilungskörper angehört.

Um dies nachzuweisen, verwandeln wir die Modulform $G_1(\tau, \ldots)$ zunächst durch Multiplikation mit einem noch von anderer Seite her zugänglichen Faktor in eine Modulfunktion, indem wir $\tau = \tau_1 : \tau_2$ setzen und

$$(11)\quad f(\tau; r_1, r_2) = G_1(\tau_1, \tau_2; r_1, r_2, N) \cdot \wp'\left(\frac{r_1\tau_1 + r_2\tau_2}{N}; \tau_1, \tau_2\right) \cdot \frac{g_2^2}{\Delta}(\tau_1, \tau_2).$$

Hierin ist $\wp'(u; \tau_1, \tau_2)$ die Ableitung der Weierstraßschen $\wp$-Funktion nach u, und g_2, Δ, wie später g_3 sind die bekannten Größen der Weierstraßschen Theorie, homogene Funktionen allein von τ_1, τ_2. Daher wird f eine im Innern der oberen Halbebene reguläre Modulfunktion, die in naher Beziehung zu den Teilwerten der Weberschen[8]) τ-Funktion steht, welche ich im folgenden mit T bezeichne:

$$(12)\qquad T(u; \tau_1, \tau_2) = \frac{g_2 g_3}{\Delta}(\tau_1, \tau_2) \cdot \wp(u; \tau_1, \tau_2)$$

Die Teilwerte $T\left(\frac{r_1\tau_1 + r_2\tau_2}{N}; \tau_1, \tau_2\right)$ der N-ten Stufe erfahren bei beliebigen Modulsubstitutionen dieselbe Permutation wie die Größen f, und durch die bekannte Schlußweise folgt, daß

$$(13)\qquad f(\tau; r_1, r_2) = R\left(T\left(\frac{r_1\tau_1 + r_2\tau_2}{N}; \tau_1, \tau_2\right), J(\tau_1, \tau_2)\right)$$

wo R eine rationale, nur von N abhängige Funktion von T, J ist und $J(\tau_1, \tau_2)$ die absolute Invariante $\frac{g_2^3}{\Delta}$ bedeutet. R hat rationale Zahlkoeffizienten und der Nenner von R verschwindet nur da, wo zwei Teilwerte T auf eine nicht-triviale Art gleich werden, d. h. für $g_2 = 0$ oder $g_3 = 0$, d. h. wenn τ_1, τ_2 Zahlen aus $K(\sqrt{-3})$ oder $K(\sqrt{-4})$ resp. mit den Determinanten $\sqrt{-3}$ oder $\sqrt{-4}$ sind.

Daher nehmen wir erst an, daß die Diskriminante D unseres Zahlkörpers von -3 und -4 verschieden ist, und schließen aus (13), daß für

$$N = Q|D|, \tau_1 = \omega_1'', \tau_2 = \omega_2'; \quad r_1\tau_1 + r_2\tau_2 = -\varrho'\sqrt{D}$$

die Zahlwerte $f(\tau; r_1, r_2)$ dem Teilungskörper angehören, welcher durch den Teilwert $T\left(\frac{\varrho'}{\sqrt{D}}; \omega_1', \omega_2'\right)$ definiert ist. Dieser ist bekanntlich der Strahlklassenkörper bezüglich $K(\sqrt{D})$, der zum Modul $(=$ Führer$)$ $Q\sqrt{D}$ gehört, möglicherweise schon zu einem Teiler dieses Führers. Nach der

[8]) H. Weber, Elliptische Funktionen und algebraische Zahlen. 2. Aufl. (1908) § 153 und § 154.

Theorie des Teilungskörpers sind die Teilwerte

$$T\left(\frac{\varrho'}{Q\sqrt{D}};\ \omega_1',\ \omega_2'\right) \text{ mit festem } \mathfrak{a} \text{ und } (\varrho', \mathfrak{a}Q\sqrt{D})$$

konjugierte algebraische Zahlen in bezug auf den absoluten Klassenkörper $K(J(\omega_1', \omega_2'), \sqrt{D})$. Hieraus folgt insbesondere:

Hilfssatz. *Ist* $P(\varrho) = 0$ *und* $(\varrho, \mathfrak{a}Q\sqrt{D}) = (\varrho_1, \mathfrak{a}Q\sqrt{D})$, *so ist auch* $P(\varrho_1) = 0$.

Das ergibt sich entweder aus (13) und den bekannten Nullstellen der Zusatzfaktoren in (11), oder direkt durch Betrachtung der Funktionen

$$\frac{G_1^{12}(\tau_1, \tau_2; r_1, r_2)}{\Delta(\tau_1, \tau_2)},$$

die ja ebenfalls durch die Teilwerte ausdrückbar sind. Das Verschwinden eines $P(\varrho)$ hängt also nur von dem größten gemeinsamen Teiler von $\frac{\varrho}{\mathfrak{a}}$ mit dem Modul $Q\sqrt{D}$ ab.

Der Quotient von zwei nicht-verschwindenden Zahlen f gehört also ebenfalls dem Teilungskörper für den Modul $Q\sqrt{D}$ an, und daher wird Satz 2 bewiesen sein, wenn wir noch zeigen: Auch die Quotienten

$$\wp'\left(\frac{\varrho'}{Q\sqrt{D}};\ \omega_1',\ \omega_2'\right) : \wp'\left(\frac{\alpha'}{Q\sqrt{D}};\ \omega_1',\ \omega_2'\right)$$

gehören dem Teilungskörper für den Modul $Q\sqrt{D}$ an, wenn man für α irgendeine Zahl aus $\mathfrak{a}$ wählt, wofür $\frac{\alpha'}{Q\sqrt{D}}$ keine halbe Periode ist. Das folgt aber aus der Theorie der komplexen Multiplikation der $\wp$-Funktion. Nach Weber[8]) ist nämlich für eine beliebige ganze Zahl μ aus $K(\sqrt{D})$, $(\mu \neq 0)$,

$$T(\mu u;\ \omega_1', \omega_2') = r_\mu(T(u;\ \omega_1', \omega_2')), \tag{15}$$

wo r_μ eine rationale Funktion von T ist, deren Koeffizienten dem absoluten Klassenkörper $K(\sqrt{D}; J(\omega_1', \omega_2'))$ angehören. Dabei verschwindet der Nenner von r_μ nur für solche u, welche die Gestalt $\frac{\omega}{\mu}$ haben, wo ω eine ganze Zahl aus $\mathfrak{a}' = (\omega_1', \omega_2')$ ist. Differentiiert man die in u identisch geltende Gl. (15) nach u, so folgt mit Rücksicht auf (12)

$$\frac{\wp'(\mu u;\ \omega_1', \omega_2')}{\wp'(u;\ \omega_1', \omega_2')}\,\mu = r_\mu'(T(u;\ \omega_1', \omega_2')).$$

Hierin setze man $u = \frac{\alpha'}{Q\sqrt{D}}$, wo $(\alpha, \mathfrak{a}Q\sqrt{D}) = \mathfrak{a}$. Dann hat die Funktion r_μ' einen Sinn, wenn nicht μ durch $Q\sqrt{D}$ teilbar ist. Wählen wir insbesondere μ so, daß

$$\mu\alpha' \equiv \varrho'(\mathfrak{a}'Q\sqrt{D}), \quad \text{wobei} \quad \varrho' \not\equiv 0\,(\mathfrak{a}'Q\sqrt{D}),$$

so ergibt sich die Zahl (14) gleich

$$r'_\mu\left(T\left(\frac{\alpha'}{Q\sqrt{D}};\,\omega'_1,\,\omega'_2\right)\right),$$

also gleich eine Zahl des Teilungskörpers, w. z. b. w.

Damit ist Satz 2 für den Fall $D \neq -3, -4$ bewiesen. Für $D = -3, -4$ muß die bekannte Modifikation der Definition von $T(u)$ eintreten, und für $D = -3$, wo $g_2(\omega'_1, \omega'_2)$ verschwindet, hat man dann noch f zu ersetzen durch

$$f^*(\tau; r_1, r_2) = G_1(\tau_1, \tau_2; r_1, r_2)\,\frac{\wp'\cdot\wp\left(\frac{r_1\tau_1 + r_2\tau_2}{N};\,\tau_1,\,\tau_2\right)}{g_3(\tau_1, \tau_2)}.$$

Im übrigen bleiben alle Schlüsse gültig.

Aus Satz 1 und 2 ergibt sich nun noch eine elegante Folgerung, wenn wir bedenken, daß nach der Theorie der Klassenkörper die $Q|D|$-ten Einheitswurzeln, also auch $\sqrt{D}$, stets dem Teilungskörper für den Modul $Q\sqrt{D}$ angehören müssen; dann gilt dasselbe also auch von den Zahlen $G_S(\varrho, \alpha)$ in (6), und daraus folgt dann

Satz 3. *Zu* $\mathfrak{a}, Q\sqrt{D}$ *gibt es eine von Null verschiedene Zahl* λ, *so daß die Perioden sämtlicher Integrale* $\lambda \cdot j(\tau; \varrho, \mathfrak{a}, Q\sqrt{D})$ *dem Teilungskörper für den Modul* $Q\sqrt{D}$ *in bezug auf den Körper* $K(\sqrt{D})$ *angehören.*

Die einfachsten Verhältnisse finden sich natürlich in dem Falle, wo die Stufe $Q|D|$ der Integrale eine Primzahl ist; d. h. $Q = 1$, $D = -q$, q eine positive Primzahl der Form $4n + 3$, $q > 3$. Hier läßt sich eine besonders einfache Wahl des Normierungsfaktors λ treffen, und hier ist der Teilungskörper für den Modul $\sqrt{-q}$ mit dem Körper identisch, der aus dem absoluten Klassenkörper durch Adjunktion der q-ten Einheitswurzeln entsteht. Für diesen Fall sollen in dem nächsten Paragraphen die Perioden genauer diskutiert werden, wobei die Sätze 1 bis 3 gleichzeitig mitbewiesen werden.

§ 2.

Die Normierung der Integrale erster Gattung für die Primzahlstufe $q = 4n + 3$.

Wir spezialisieren jetzt die Resultate des vorigen Paragraphen auf den Fall, daß $-D = q$ eine positive Primzahl der Form $4n + 3$ ist, während $Q = 1$ angenommen wird. Die Differentiale dj oder auch die homogen geschriebenen Integranden

$$\omega_2^{-2}\,\vartheta_2\left(\frac{\omega_1}{\omega_2};\,\varrho, \mathfrak{a}, \sqrt{-q}\right)$$

erfahren dann bei beliebigen homogenen Modulsubstitutionen in ω_1, ω_2 lineare homogene Substitutionen unter sich (bei festem $\mathfrak{a}, q$), welche eine endliche, mit der Modulargruppe mod q $\left(\text{vom Grade } q^{\frac{(q^2-1)}{2}}\right)$ isomorphe Gruppe bilden, da ja jene Funktionen bei $\Gamma(q)$ absolut invariant bleiben. Diese Gruppe in $\frac{q-1}{2}$ Variablen ist von F. Klein[9]) zuerst aufgestellt worden. Ihre, den beiden Substitutionen $\tau+1$ und $\frac{-1}{\tau}$ entsprechenden Erzeugenden sind

$$1.\quad x_n' = \varepsilon^{n^2} x_n; \qquad 2.\quad x_n' = \frac{1}{\sqrt{-q}} \sum_{k=1}^{\frac{q-1}{2}} (\varepsilon^{-2nk} - \varepsilon^{2nk})\, x_k$$

für $n = 1, 2, \ldots, \frac{q-1}{2}$. Nach Frobenius[10]) ist diese Gruppe irreduzibel.

Wir wollen die bisher mit ϱ bezeichneten Restklassen nun in bestimmter Art auswählen. Zunächst ist die Klassenzahl h des Körpers $K(\sqrt{-q})$ ungerade. Es mögen $\mathfrak{a}_1 = (1), \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_h$ je ein ganzes Ideal aus jeder der h Idealklassen sein, überdies noch teilerfremd zu q, ihre Normen seien $A_1 = 1, A_2, \ldots, A_h$. Alle Restklassen mod $\sqrt{-q}$ können durch rationale Zahlen repräsentiert werden, die Restklassen ϱ also in der Form $A \cdot x$, wo x ganz rational, gewählt werden. Nun sind alle Integranden $\vartheta_2(\tau, \varrho, \mathfrak{a}, \sqrt{-q})$, die der Restklasse $\varrho = 0$ entsprechen, Null, und ϱ und $-\varrho$ geben bis auf das Vorzeichen dieselbe Reihe. Bedeutet jetzt r eine rationale Primitivzahl mod q, so werden, weil -1 quadratischer Nichtrest mod q ist, durch die Zahlen

$$\pm r^{2n}, \qquad n \bmod \frac{q-1}{2}$$

alle zu q teilerfremden Restklassen mod q dargestellt. Wir setzen nun in etwas gegen § 1 abweichender Bezeichnung

$$j_n(\tau; \mathfrak{a}) = \frac{2\pi i}{Aq} \int_{\infty}^{\tau} \vartheta_2(\tau; r^{2n} A, \mathfrak{a}, \sqrt{-q})\, d\tau, \qquad n \bmod \frac{q-1}{2};$$

und erhalten damit

$$j_n(\tau+1, \mathfrak{a}) = \beta_n j_n(\tau, \mathfrak{a}),$$

$$(16) \qquad j_n\left(-\frac{1}{\tau}, \mathfrak{a}\right) = \sum_{k=1}^{\frac{q-1}{2}} \alpha_{nk}\, j_k(\tau, \mathfrak{a}) + P(r^{2n} A, \mathfrak{a}),$$

---

[9]) Math. Ann. **15** (1879), S. 275.

[10]) Siehe die Tabelle bei Frobenius, Über Gruppencharaktere, Sitzungsber. Berliner Akad. 1896, S. 1021.

wobei

$$\alpha_{nk} = \frac{\varepsilon^{-2r^{2(n+k)}A} - \varepsilon^{+2r^{2(n+k)}A}}{\sqrt{-q}}, \qquad \beta_n = \varepsilon^{r^{4n}A}, \qquad n, k = 1, 2, \ldots, \frac{q-1}{2}.$$

Die Koeffizienten α_{nk} sind Zahlen aus dem reellen Körper $K(\varepsilon + \varepsilon^{-1})$. Die im Körper $K(\varepsilon)$ enthaltene Zahl $\sqrt{-q}$ bleibt übrigens ungeändert, wenn ε durch ε^{r^2} ersetzt wird[11]), ändert sich dagegen im Vorzeichen bei Ersetzung von ε durch ε^{-1}.

Bestehen nun mit irgendwelchen Konstanten α_{nk}, β_n, P für ein System von $\frac{q-1}{2}$ Funktionen $j_n(\tau)$ die Relationen (16), so folgt für eine beliebige Modulsubstitution S, indem man S aus den beiden Erzeugenden $\tau+1$ und $\frac{-1}{\tau}$ zusammensetzt,

$$(17) \qquad \begin{aligned} j_n(S\tau) = &\sum_{k=1}^{\frac{q-1}{2}} H_{n,k}^{(S)}\left(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{\frac{q-1}{2}, \frac{q-1}{2}}, \beta_1, \ldots\right) j_k(\tau) \\ &+ \sum_{k=1}^{\frac{q-1}{2}} G_{n,k}^{(S)}(\alpha_{11}, \ldots, \beta_1, \ldots) P(r^{2k}A, \mathfrak{a}). \end{aligned}$$

Hier ist $H^{(S)}$ und $G^{(S)}$ ein allein durch die Zusammensetzung von S aus den Erzeugenden bestimmtes System von zweimal $\left(\frac{q-1}{2}\right)^2$ ganzen rationalen Funktionen der α, β mit ganzen rationalen Koeffizienten. Nun genügt das durch eine zyklische Permutation der Indizes aus $j_n(\tau, \mathfrak{a})$ entstehende System

$$j_n^*(\tau, \mathfrak{a}) = j_{n+1}(\tau, \mathfrak{a})$$

(wobei der Index natürlich nur mod $\frac{q-1}{2}$ zu rechnen ist) ebenfalls einem System von Gleichungen wie (16), und die neuen Koeffizienten α_{nk}^*, β_n^*, $P^*(r^{2n}A, \mathfrak{a})$ ergeben sich aus den früheren einfach dadurch, daß man in α und β die Einheitswurzel ε durch ε^{r^4} ersetzt und

$$P^*(r^{2n}A, \mathfrak{a}) = P(r^{2(n+1)}A, \mathfrak{a})$$

setzt. Wählen wir insbesondere in (17) für S eine Substitution der Gruppe $\Gamma(q)$, so wissen wir, daß die Matrix der H_{nk} die Einheitsmatrix ist, während das konstante Glied die zu S gehörige Periode von $j_n(\tau)$ ist. Und man kann nach dem Vorangehenden die Perioden aller $j_n(\tau)$ aus der Periode eines einzigen $j_1(\tau)$ folgendermaßen erhalten:

[11]) Auch der Übergang von ε zu ε^A ändert $\sqrt{-q}$ nicht, weil jede Idealnorm A quadratischer Rest mod q ist.

Satz 4. *Die zu S gehörige Periode von $j_0(\tau, \mathfrak{a}_1)$ hat die Gestalt*

$$j_0(S\tau, \mathfrak{a}_1) = j_0(\tau, \mathfrak{a}_1) + \sum_{k=1}^{\frac{q-1}{2}} g_k^{(S)}(\varepsilon)\, P(r^{2k}, \mathfrak{a}_1),$$

wo $g_k(\varepsilon)$ eine ganze rationale rationalzahlige Funktion von ε bedeutet. Für die Gesamtheit der $h \cdot \frac{q-1}{2}$ Integrale j mit demselben q gilt dann

$$j_n(S\tau, \mathfrak{a}) = j_n(\tau, \mathfrak{a}) + \sum_{k=1}^{\frac{q-1}{2}} g_k^{(S)}(\varepsilon r^{4n} A)\, P(r^{2(k+n)} A, \mathfrak{a}).$$

Es sollen nunmehr die Normierungsfaktoren $\lambda(\mathfrak{a})$ in einer besonders übersichtlichen Art gewählt werden, damit die Gesamtheit der λP als konjugierte algebraische Zahlen auftreten. Wir bedenken, daß $\frac{q+1}{4}$ eine ganze Zahl ist und daß daher die Funktionen

$$(18) \qquad G_1(\tau_1, \tau_2; a_1, a_2) \cdot \left(\frac{g_2 g_3}{\Delta}\right)^{\frac{q+1}{4}} \cdot \prod_{k=1}^{\frac{q-1}{2}} G_1(\tau_1, \tau_2; r^{2k} a_1, r^{2k} a_2) = f(\tau_1, \tau_2; a_1, a_2)$$

homogene ganze Modulformen in τ_1, τ_2 von der Dimension 0, und zwar Modulfunktionen von $\frac{\tau_1}{\tau_2}$ der Stufe q sind. Dabei ist wie bisher

$$G_1(\tau_1\ \tau_2; a_1, a_2) = \sum_{m_i \equiv a_i (q)} \frac{1}{(m_1\tau_1 + m_2\tau_2)\,|\ldots|^s}\Big|_{s=0},$$

wobei a_1, a_2 nur mod q in Frage kommen und die Reste $a_1 = 0$, $a_2 = 0$ ausgeschlossen sind. Diese Funktionen q-ter Stufe erfahren bei beliebigen Modulsubstitutionen dieselbe Umsetzung wie das System der Teilwerte $T\left(\frac{a_1\tau_1 + a_2\tau_2}{q};\ \tau_1, \tau_2\right)$, und es ist daher

$$(19) \qquad f(\tau_1, \tau_2; a_1, a_2) = \Phi\left(T\left(\frac{a_1\tau_1 + a_2\tau_2}{q};\ \tau_1, \tau_2\right),\ J(\tau_1, \tau_2)\right),$$

wo Φ eine rationale Funktion von T, J ist, deren Gestalt nur von q, aber nicht von a_1, a_2 abhängt und deren Nenner $\neq 0$, wenn für τ_1, τ_2 Basiszahlen eines Ideals aus $K(\sqrt{-q})$ eingesetzt werden. Die Zahlkoeffizienten in Φ sind rational, auf Grund der bekannten Reihenentwicklungen.

Wir setzen nun, wie in § 1, τ_1, τ_2 gleich einer Basis ω_1', ω_2' eines der Ideale $\mathfrak{a}'$ aus $K(\sqrt{-q})$ und definieren a_1, a_2 zu jedem $n = 1, 2, \ldots, \frac{q-1}{2}$ durch

$$a_1\omega_1' + a_2\omega_2' = -r^{2n} A \sqrt{-q}.$$

Dann ist zunächst nach (10) des vorigen Paragraphen

$$P(r^{2(n+k)}A, \mathfrak{a}) = -\sqrt{-q}\, G_1(\omega_1', \omega_2';\ r^{2k}a_1, r^{2k}a_2),$$

$$\prod_{k=1}^{\frac{q-1}{2}} P(r^{2(n+k)}A, \mathfrak{a}) = -(\sqrt{-q})^{\frac{q-1}{2}} \prod_{k=1}^{\frac{q-1}{2}} G_1(\omega_1', \omega_2';\ r^{2k}a_1, r^{2k}a_2).$$

Dieses Produkt hängt aber von n überhaupt nicht ab, weil auf der linken Seite der Exponent $n+k$ nur mod $\frac{q-1}{2}$ in Betracht kommt. Setzt man also

$$\lambda = \lambda(\mathfrak{a}) = \left(\frac{g_2 g_3}{-q\cdot\Delta}(\omega_1', \omega_2')\right)^{\frac{q-1}{4}} \cdot \prod_{k=1}^{\frac{q-1}{2}} P(r^{2k}A, \mathfrak{a}), \tag{20}$$

so folgt aus (18), (19)

$$\lambda(\mathfrak{a})\cdot P(r^{2n}A, \mathfrak{a}) = \Phi\left(T\left(\frac{r^{2n}A}{\sqrt{-q}};\ \omega_1', \omega_2'\right),\ J(\omega_1', \omega_2')\right). \tag{21}$$

In Verbindung mit Satz 4 ergibt sich also

Satz 5. *Die normierten Integrale*

$$j_n^*(\tau, \mathfrak{a}) = \lambda(\mathfrak{a})\cdot j_n(\tau, \mathfrak{a})$$

verhalten sich folgendermaßen: Zu jeder Substitution S von $\Gamma(q)$ gibt es $\frac{q-1}{2}$ Polynome $g_k^{(S)}(x)$ mit rationalen Koeffizienten, derart, daß

$$j_n^*(S\tau, \mathfrak{a}) = j_n^*(\tau, \mathfrak{a}) + \sum_{k=1}^{\frac{q-1}{2}} g_k^{(S)}(\varepsilon^{r^{4n}A})\, \Phi\left(T\left(\frac{r^{2(n+k)}A}{\sqrt{-q}};\ \omega_1', \omega_2'\right), J(\omega_1', \omega_2')\right).$$

Dabei ist Φ die allein durch q bestimmte rationalzahlige rationale Funktion aus (19).

Wir stellen noch fest, daß die Normierungsfaktoren $\lambda(\mathfrak{a})$ nicht etwa Null sind. Nach (20) müßte andernfalls nämlich ein $P(r^{2n}A, \mathfrak{a})$ Null sein, und nach dem Hilfssatz des vorigen Paragraphen wären dann alle P mit demselben $\mathfrak{a}$ gleich Null; also hätten die $\frac{q-1}{2}$ Integrale $j_n(\tau, \mathfrak{a})$ lauter Perioden Null, wären also überall reguläre Modulfunktionen der Stufe q; diese müßten aber bekanntlich identisch verschwinden. Dies trifft jedoch nicht zu. Denn allgemeiner gilt sogar

Satz 6. *Die $h\cdot\frac{q-1}{2}$ Integranden*

$$\vartheta_2(\tau;\ r^{2n}A_i, \mathfrak{a}_i, \sqrt{-q})$$

für $i = 1, 2, \ldots, h$ und $n = 1, 2, \ldots, \frac{q-1}{2}$ sind linear unabhängig.

Gesetzt nämlich, es gebe eine lineare Relation

$$\sum_{\substack{k=1,\dots,h \\ n=1,\dots,\frac{q-1}{2}}} c_{nk}\,\vartheta_2(\tau; r^{2n} A_k \mathfrak{a}_k, \sqrt{-q}) = 0$$

mit konstantem, d. h. von τ unabhängigem c_{nk}. Tragen wir die Potenzreihen für ϑ_2 ein und fassen die Potenzen von $e^{\frac{2\pi i \tau}{q}}$ mit einem festen Primzahlexponenten p zusammen. Zerfällt p in $K(\sqrt{-q})$ in zwei verschiedene Faktoren $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$, so tritt ein solches Glied überhaupt nur in den Reihen ϑ_2 der Klassen von $\mathfrak{p}^{-1}$ und $\mathfrak{p}'^{-1}$ auf, etwa für $\mathfrak{a}_k$ und $\mathfrak{a}_l$ (wo auch $k = l$ sein darf). Ist $\mu = \mathfrak{p}\mathfrak{a}_k \equiv r^{2n_1} A_k \pmod{\mathfrak{a}_k \sqrt{-q}}$ und $\nu = \mathfrak{p}'\mathfrak{a}_l \equiv r^{2n_2} A_l \pmod{\mathfrak{a}_l \sqrt{-q}}$, so folgt

$$c_{n_1 k}\,\mu + c_{n_2 l}\,\nu = 0.$$

Verschwinden diese c nicht beide, so müßte $\frac{\mu}{\nu} = \frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}'}\frac{\mathfrak{a}_k}{\mathfrak{a}_l}$ einen von der Anzahl von $\mathfrak{p}$ innerhalb seiner Klasse mod $\sqrt{-q}$ unabhängigen Wert besitzen, was offenbar nicht der Fall ist, da es unendlich viele Primideale ersten Grades in jeder Klasse mod $\sqrt{-q}$ gibt. Also sind alle $c_{nk} = 0$.

Die $h \cdot \frac{q-1}{2}$-Zahlen Φ in (22) sind nach der Weberschen Theorie des Teilungskörpers konjugierte algebraische Zahlen in bezug auf $K(\sqrt{-q})$. Dieser Körper enthält auch die in den Koeffizienten $g_k^{(S)}$ steckenden Einheitswurzeln ε. Um nun nachzuweisen, daß auch die $h \cdot \frac{q-1}{2}$ Perioden, welche die $h \cdot \frac{q-1}{2}$ Integrale j^* bei einer Substitution S aus $\Gamma(q)$ vermöge (22) besitzen, konjugiert sind, ist ein genaueres Eingehen auf die algebraische Struktur des Teilungskörpers notwendig, und zwar ist der entscheidende Schluß erst durch die Anwendung der tieferen arithmetischen Sätze von Herrn Hasse über die komplexe Multiplikation der $\wp$-Funktion möglich. Dies wird im folgenden Paragraphen gezeigt.

§ 3.

Die algebraische Natur der normierten Periodensysteme für eine Primzahlstufe $q = 4n + 3$.

Über den Teilungskörper gelten zunächst folgende Sätze:

Satz 6. *Der Teilungskörper für den Modul $\sqrt{-q}$ bezüglich des Körpers $K(\sqrt{-q})$ (d. h. der Strahlklassenkörper für den Führer $\sqrt{-q}$ in $K(\sqrt{-q})$) entsteht aus dem absoluten Klassenkörper von $K(\sqrt{-q})$ durch Adjunktion des absolut-Abelschen Körpers $K(\varepsilon + \varepsilon^{-1})$.*

Ist nämlich K_T dieser Teilungskörper, so gelten in ihm folgende Zerlegungssätze [8]): Ein Primideal $\mathfrak{p}$ des Grundkörpers $K(\sqrt{-q})$ zerfällt dann und nur dann in lauter Faktoren ersten Grades in K_T, wenn $\mathfrak{p}$ in $K(\sqrt{-q})$ ein Hauptideal ist und $\mathfrak{p} \equiv 1 \pmod{\sqrt{-q}}$. Sein Relativgrad bezüglich $K(\sqrt{-q})$ ist übrigens $h \cdot \frac{q-1}{2}$. Genau dasselbe Gesetz gilt aber in dem Körper, der aus dem absoluten Klassenkörper K_k durch Adjunktion von ε (oder, was dasselbe ist, von $\varepsilon + \varepsilon^{-1}$, weil $K(\varepsilon) = K(\varepsilon + \varepsilon^{-1}, \sqrt{-q})$) entsteht, wie sich aus dem bekannten Zerlegungsgesetz in $K(\varepsilon)$ und im Klassenkörper K_k sofort ergibt. Also sind die Körper K_T und $K(\varepsilon, K_k)$ identisch, und auch K_T ist also ein relativ-Abelscher Körper bezüglich $K(\sqrt{-q})$.

Wir bezeichnen weiterhin die Werte der T-Funktion

$$T\left(\frac{\alpha}{\sqrt{-q}};\ \omega_1, \omega_2\right) \quad \text{mit} \quad T\left(\frac{\alpha}{\sqrt{-q}};\ \mathfrak{a}\right); \tag{23}$$

wenn ω_1, ω_2 eine Basis des ganzen Ideals $\mathfrak{a}$ aus $K(\sqrt{-q})$ mit positiv-imaginärer Determinante und α eine ganze Zahl aus $\mathfrak{a}$. Wegen der Homogenität von der Dimension 0 ist

$$T\left(\frac{\lambda\alpha}{\sqrt{-q}};\ \lambda\mathfrak{a}\right) = T\left(\frac{\alpha}{\sqrt{-q}};\ \mathfrak{a}\right), \tag{24}$$

wenn λ eine Körperzahl. Ebenso setzen wir die absolute Invariante — welche den absoluten Klassenkörper definiert —

$$J(\mathfrak{a}) = J(\omega_1, \omega_2).$$

Sie hat für äquivalente Ideale denselben Wert. Wir ordnen ferner nach Herrn Hasse [12]) jedem — zunächst jedem ganzen — zu q teilerfremden Ideal $\mathfrak{a}$ aus $K(\sqrt{-q})$ eindeutig einen Wert von T zu, durch die Festsetzung

$$T(\mathfrak{a}) = T\left(\frac{\alpha}{\sqrt{-q}};\ \mathfrak{a}\right), \text{ wo } \alpha \equiv 1\,(\sqrt{-q}) \text{ und } \alpha \equiv 0\,(\mathfrak{a}).$$

Hiernach ist $T(\lambda\mathfrak{a}) = T(\mathfrak{a})$, wenn λ eine ganze Zahl aus K mit $\lambda \equiv 1(\sqrt{-q})$; es hat also $T(\mathfrak{a})$ für alle ganzen Ideale derselben Strahlklasse mod $\sqrt{-q}$ den gleichen Wert, und deshalb setzen wir auch für Idealquotienten $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}$, wo $(\mathfrak{b}, q) = 1$

$$T\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}\right) = T\left(\lambda\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}\right),$$

wenn λ durch $\mathfrak{b}$ teilbar und $\lambda \equiv 1(\sqrt{-q})$.

---

[12]) loc. cit. [3]), S. 130 u. 134.

Für eine nicht durch q teilbare ganze rationale Zahl n ist also

$$T(n\mathfrak{a}) = T\left(\frac{nx}{\sqrt{-q}};\ n\mathfrak{a}\right) = T\left(\frac{x}{\sqrt{-q}};\ \mathfrak{a}\right),$$

wo

$$nx \equiv 1 \pmod{q}, \qquad x \equiv 0 (A).$$

Insbesondere wenn r die frühere Primitivzahl mod q bedeutet,

$$T(r^{-2n}\mathfrak{a}) = T\left(\frac{r^{2n}tA}{\sqrt{-q}};\ \mathfrak{a}\right) \qquad \left(n = 1, 2, \ldots, \frac{q-1}{2}\right)$$

wo t eine ganze rationale Zahl mit $tA \equiv 1 \pmod{q}$.

Die Zahlen $T(r^{2n}\mathfrak{a})$, wenn $n = 1, 2, \ldots, \frac{q-1}{2}$ und $\mathfrak{a}$ die h Ideale aus den verschiedenen Idealklassen durchläuft, sind ein System konjugierter Zahlen des Teilungskörpers in bezug auf $K(\sqrt{-q})$.

Nach Herrn Hasse[12]) gelten nun die Kongruenzen:

Satz 7. *Für jedes Primideal* $\mathfrak{p}$ *ersten Grades aus* $K(\sqrt{-q})$ *mit der Norm* $\mathfrak{p}$ *ist*

$$J^p(\mathfrak{a}) \equiv J(\mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{a}) \pmod{\mathfrak{p}}$$

$$T^p(\mathfrak{a}) \equiv T(\mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{a}) \pmod{\mathfrak{p}}$$

Es lassen sich nun nach Satz 6 die $T(\mathfrak{a})$ rational durch ε^t und $J(\mathfrak{a})$ ausdrücken:

$$T(\mathfrak{a}) = \varphi(\varepsilon^t, J(\mathfrak{a})), \text{ wo } tA \equiv 1 \pmod{q}, \tag{25}$$

wo φ ein Polynom mit rationalen Koeffizienten. Ersetzen wir hier ε, $J(\mathfrak{a})$ durch die algebraischen Konjugierten, so muß also sich als Wert von φ wieder eine der Zahlen $T(\mathfrak{r})$ ergeben. Welche dies ist, läßt sich aber erst durch den zitierten Satz von Hasse entscheiden:

Satz 8. *Gilt für ein bestimmtes* $\mathfrak{a}$ *die Gleichung* (25), *so ist die Gleichung mit demselben* φ *für alle* $\mathfrak{a}$ *richtig.*

Zum Beweise sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal wie oben in Satz 7. Dann folgt aus der für ein bestimmtes $\mathfrak{a}$ gültigen Gleichung (25) die Kongruenz

$$T^p(\mathfrak{a}) \equiv \varphi^p(\varepsilon^A, J(\mathfrak{a})) \equiv \varphi(\varepsilon^{pA}, J^p(\mathfrak{a})) \pmod{p}$$

und nach Anwendung von Satz 7

$$T(\mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{a}) \equiv \varphi(\varepsilon^{pt}, J(\mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{a})) \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Diese Kongruenz zwischen den beiden, nach dem Vorangehenden nur von der Strahlklasse von $\mathfrak{p}$ abhängigen Zahlen gilt für alle unendlich vielen Primideale $\mathfrak{p}$ dieser Klasse. Also sind die beiden Zahlen einander gleich; das bedeutet aber die Richtigkeit von (25) auch für $\mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{a}$ statt $\mathfrak{a}$, d. h. die Gültigkeit von (25) für jedes $\mathfrak{a}$.

Mit Hilfe dieses Satzes 8 lassen sich nun die Periodensysteme der j^* nach (22) allein durch ε und Zahlen des Klassenkörpers ausdrücken. Zunächst sind für ganze rationale n, x

$$T\left(\frac{r^{2n}A}{\sqrt{-q}}; \mathfrak{a}'\right) = T\left(\frac{x \cdot r^{2n}A}{\sqrt{-q}}; x \cdot \mathfrak{a}'\right) = T(x\,\mathfrak{a}'),$$

wenn x so gewählt wird, daß

$$x \cdot r^{2n}A \equiv 1 \pmod{\sqrt{-q}}.$$

Nach (25) ist aber

$$T(x\,\mathfrak{a}') = \varphi(\varepsilon^t, J(x\,\mathfrak{a}')), \text{ wo } tN(x\,\mathfrak{a}') \equiv x^2 At \equiv 1 \pmod{q}.$$

Also endlich

$$T\left(\frac{r^{2n}A}{\sqrt{-q}}; \mathfrak{a}'\right) = \varphi(\varepsilon^{r^{4n}A}, J(\mathfrak{a}')), \tag{26}$$

wo φ das von n, A unabhängige Polynom aus (25) ist. Trägt man dies in das Polynom Φ in (22) ein, so ergibt sich aus Satz 5 die schärfere Aussage:

Satz 9. *Zu jeder Substitution S aus $\Gamma(q)$ gibt es $\frac{q-1}{2}$ rationalzahlige Polynome $g_k^{(S)}(x)$, so daß*

$$j_n^*(S\tau; \mathfrak{a}) = j_n^*(\tau; \mathfrak{a}) + \sum_{k=1}^{\frac{q-1}{2}} g_k^{(S)}(\varepsilon^{r^{2n}A})\,\psi(\varepsilon^{r^{4(n+k)}A}, J(\mathfrak{a}')), \tag{27}$$

wo ψ ein allein durch den Körper $K(\sqrt{-q})$ bestimmtes rationalzahliges Polynom ist, das nicht von S abhängt.

Wählen wir nun die repräsentierenden Ideale $\mathfrak{a}$ der h Idealklassen von $K(\sqrt{-q})$ so aus, daß immer

$$A = N(\mathfrak{a}) \equiv 1 \pmod{q}, \tag{28}$$

was immer möglich ist, so erkennt man aus (27), daß das einer Substitution S entsprechende Periodensystem der $h \cdot \frac{q-1}{2}$ Integrale j^* stets ein System konjugierter algebraischer Zahlen aus $K(\varepsilon + \varepsilon^{-1}, K_k)$ ist, und zwar sind die h Perioden, welche die h Integrale mit derselben Nummer n haben, konjugiert in bezug auf $K(\varepsilon + \varepsilon^{-1})$, dagegen die $\frac{q-1}{2}$ Perioden der $\frac{q-1}{2}$ Integrale mit demselben $\mathfrak{a}$ sind konjugiert in bezug auf K_k.

Bildet man daher die symmetrische Verbindung

$$H(\tau, \mathfrak{a}) = \sum_{n=1}^{\frac{q-1}{2}} j_n^*(\tau, \mathfrak{a}), \tag{29}$$

so sind die Perioden dieses $H(\tau, \mathfrak{a})$ symmetrisch in den $\varepsilon^{r^2 n}$, gehören also dem Körper $K(\sqrt{-q}, J(\mathfrak{a}))$, d. h. dem absoluten Klassenkörper an; genauer gilt

Satz 10. *Das Periodensystem der h Integrale $H(\tau, \mathfrak{a})$ besteht für jede Substitution S von $\Gamma(q)$ aus konjugierten Zahlen des Klassenkörpers K_k in bezug auf $K(\sqrt{-q})$. Insbesondere sind die Perioden von*

$$j(\tau) = \sum_{i=1}^{h} H(\tau, \mathfrak{a}_i) = \sum_{n, \mathfrak{a}} j_n^*(\tau, \mathfrak{a})$$

symmetrisch in den $J(\mathfrak{a})$, also Zahlen des quadratischen Körpers $K(\sqrt{-q})$.

Genau das Entsprechende gilt aber dann auch für die Perioden der konjugierten Integrale $H(L\tau; \mathfrak{a})$ und $j(L\tau)$, wo L eine beliebige Modulsubstitution ist.

Es sei noch hervorgehoben, daß auf Grund der expliziten Formeln für die Kleinsche Gruppe das einzelne $H(\tau, \mathfrak{a})$ bereits zur Gruppe $\Gamma_0^0(q)$ gehört — deren Koeffizienten $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ der Bedingung $b \equiv c \equiv 0 \pmod{q}$ genügen — und daß durch diese Eigenschaft $H(\tau, \mathfrak{a})$ innerhalb der linearen Schar der $j_n(\tau; \mathfrak{a})$ mit demselben $\mathfrak{a}$ bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt ist.

Jedes einzelne $H(\tau, \mathfrak{a})$ erzeugt durch seine konjugierten in bezug auf die volle Modulgruppe ein System von $\frac{q(q^2-1)}{2}$ Funktionen, unter deren Differentialen sich genau je $\frac{q-1}{2}$ linear unabhängige befinden, weil die Kleinsche Gruppe in $\frac{q-1}{2}$ Variablen irreduzibel ist. Da nach dem obigen die Perioden aller konjugierten H demselben Körper über $K(\sqrt{-q})$ angehören, der zu $K(\varepsilon + \varepsilon^{-1})$ fremd ist, liegt die Vermutung nahe, daß die Kleinsche Gruppe bei geeigneter Wahl der Variablen nur Koeffizienten aus $K(\sqrt{-q})$ enthält, im Gegensatz zu ihrer traditionellen Gestalt, welche die Adjunktion von ε erfordert. In der Tat läßt sich eine Transformation der Gruppe in die gewünschte Form angeben:

Man schreibe nämlich die Erzeugenden der Gruppe — wegen besserer Übersichtlichkeit der folgenden Rechnungen — in folgender Form, wobei die Indizes nur mod q in Betracht kommen und die Variablen x_n den Festsetzungen genügen:

$$x_n = -x_{-n}, \text{ also } x_0 = 0. \tag{30}$$

$$1.\ x_n = \varepsilon^{n^2} x_n; \quad 2.\ x_n' = \frac{1}{\sqrt{-q}} \sum_k \varepsilon^{-2nk} x_k. \tag{31}$$

Man führe nun neue Variablen y_a ein durch

$$y_a = \sum_n (\varepsilon^{an^2} - \varepsilon^{-an^2})\chi(n)x_n, \tag{32}$$

wobei $\chi(n) = \left(\frac{n}{q}\right)$ das quadratische Restsymbol mod q bedeutet; auch die y_n genügen den Bedingungen (30); alle Summationen sind immer über ein volles Restsystem mod q zu erstrecken. Die Umkehrung von (32) erhält man so:

$$\sum_a y_a \varepsilon^{-ak^2} = \sum_{a,n} (\varepsilon^{a(n^2-k^2)} - \varepsilon^{-a(n^2+k^2)})\chi(n)x_n$$
$$= q(\chi(k)x_k + \chi(-k)x_{-k}) = 2q\cdot\chi(k)x_k.$$
$$x_k = \frac{\chi(k)}{2q}\sum_a y_a \varepsilon^{-ak^2}.$$

Daher lauten die den 1., 2. entsprechenden Substitutionen der y folgendermaßen:

$$y'_a = \sum_n (\varepsilon^{an^2} - \varepsilon^{-an^2})\chi(n)x'_n = \frac{1}{2q}\sum_b y_b \sum_n \chi^2(n)(\varepsilon^{(a-b+1)n^2} - \varepsilon^{(1-a-b)n^2})$$

Nun ist aber bekanntlich nach der Theorie der Gaußschen Summen

$$\sum_n \varepsilon^{k\cdot n^2} = \chi(k)\sqrt{-q}, \text{ wenn } k \not\equiv 0.$$

Die erste Substitution lautet also in den y:

$$1.\quad y'_a = \frac{1}{2\sqrt{-q}}\sum_b y_b(\chi(a+b+1) - \chi(a+b-1)) + \frac{y_{a+1}+y_{a-1}}{2}. \tag{33}$$

Analog kommt für die Substitution 2:

$$2.\quad y'_a = \frac{1}{q}\sum_{b,k} y_b \chi(k)\cdot\chi(a-2k-bk^2). \tag{34}$$

Damit ist in der Tat gezeigt, daß die beiden erzeugenden Substitutionen (31) vermöge der Variablentransformation (32) in die Substitutionen (33), (34) übergehen, deren Koeffizienten bereits zu $K(\sqrt{-q})$ gehören. Daß eine solche Transformation existieren muß, folgt, worauf mich Herr J. Schur aufmerksam machte, bereits aus allgemeinen Sätzen von Herrn Schur[13]), aus denen jedoch nichts über die Aufstellung dieser Transformation zu entnehmen ist. Auf allgemeinere Folgerungen für die Theorie der Integrale der q-ten Stufe werde ich an anderer Stelle eingehen.

[13]) J. Schur, Arithmetische Untersuchungen über endliche Gruppen linearer Substitutionen. Berliner Akad. Ber. 1906, S. 177, wo der Satz IXa auf die aus den Potenzen der Substitution 2 bestehenden Untergruppe angewandt werden muß.

(Eingegangen am 4. Mai 1928.)

Topologische Fragen der Differentialgeometrie. III.

Kurvensysteme auf Flächen.

Von

Karl Mayrhofer in Hamburg.

Wird ein ebenes Gebiet, das von einem Büschel paralleler Geraden überdeckt wird, topologisch in ein Gebiet irgendeiner Fläche übergeführt, so soll das Bild des Parallelenbüschels eine *Kurvenschar* heißen. Liegen im Flächengebiete n Kurvenscharen, so daß sich je zwei Kurven aus verschiedenen Scharen höchstens einmal schneiden, so werde von einem (n-*fachen*) *Kurvensystem* gesprochen; insbesonders heiße das System für $n = 2$ ein *Netz*, für $n = 3$ ein *Gewebe*[1]) und für $n = 4$ ein *Geflecht*.

Während die beiden Scharen eines Netzes immer gleichzeitig auf zwei Parallelenbüschel topologisch abbildbar sind, trifft dies bereits für Gewebe im allgemeinen nicht mehr zu. Sind S_1, S_2, S_3 die Scharen eines Gewebes und K_1, K_2, K_3 drei durch das Zentrum O hindurchgehende Kurven (Fig. 1), wobei z. B. K_1 zu S_1 gehöre, und geht man von einem Punkte P_1 auf K_1 längs der durch P_1 gehenden Kurve aus S_3 so lange weiter, bis man K_2 in P_2 trifft, dann von P_2 aus längs der Kurve aus S_1 bis P_3 usw., so wird man von P_6 ausgehend im allgemeinen in einem von P_1 verschiedenen Punkt nach K_1 zurückkehren. Es kann aber sein, daß für beliebiges O und hinreichend nahes P_1 sich die Kurvenzüge zu einem Sechseck schließen; *die Geschlossenheit dieser Sechsecke ist die notwendige und hinreichende Bedingung für die topologische Abbildbarkeit*

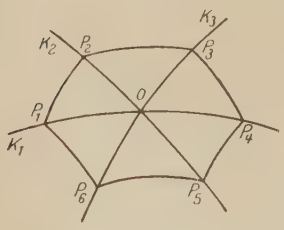

Fig. 1.

[1]) Vgl. W. Blaschke, Topologische Fragen der Differentialgeometrie. I, Math. Zeitschrift **28** (1928), S. 150f.

des Gewebes auf drei Parallelenbüschel, ein Satz, der von G. Thomsen [2]) und unter allgemeineren Voraussetzungen von W. Blaschke [3]) bewiesen wurde; derartige Gewebe sollen *Sechseckgewebe* [1]) heißen.

Sind alle Gewebe eines n-fachen Systems Sechseckgewebe, so werde das System ein *Sechsecksystem* genannt; insbesondere soll für $n = 4$ von einem *Sechseckgeflecht* gesprochen werden. Besteht ein System aus Parallelenbüscheln, so soll der Ausdruck *Parallelensystem* (Parallelennetz usw.) gelegentlich gebraucht werden.

Inhaltsübersicht.

In § 1 der vorliegenden Arbeit werden zunächst die Geflechte, welche sich auf vier Parallelenbüschel topologisch abbilden lassen, gekennzeichnet. Für diese Abbildbarkeit ist notwendig und hinreichend, daß zwei Gewebe des Geflechtes Sechseckgewebe sind und daß je zwei hinreichend kleine, konzentrische Sechsecke dieser Gewebe auf einer den Geweben gemeinsamen Kurve entweder keine oder zwei gemeinsame Ecken haben (Satz 1, Fig. 2, 3). Die Voraussetzungen sind unabhängig. Aus dem Beweisverfahren dieses Satzes folgt, daß eine topologische Abbildung, die drei Parallelenbüschel in solche überführt, affin ist (Satz 2); ferner kann man aus Satz 1 den Satz von W. Blaschke, daß zwei zueinander „diagonale" Netze gleichzeitig in zwei Parallelogrammnetze topologisch überführbar sind, folgern (Satz 3, Fig. 7). Satz 4 stellt eine Verallgemeinerung von Satz 1 dar; er gibt unabhängige Bedingungen, welche die Abbildbarkeit eines n-fachen Systems auf n Parallelenbüscheln kennzeichnen.

Jedes Sechseckgeflecht läßt sich topologisch so transformieren, daß eines seiner Gewebe ein Parallelengewebe wird. In § 2 werden unter gewissen Differentiierbarkeitsannahmen alle Scharen bestimmt, welche neben den drei Parallelenbüscheln bei einer solchen Abbildung auftreten können. Satz 5 gibt eine Zusammenstellung dieser Scharen. Soweit sie krummlinig sind (daneben sind nur mehr Strahlenbüschel möglich), lassen sie sich aus den in Fig. 10 bis 13 dargestellten Kurven affin herleiten.

Schließlich werden alle Sechseckgeflechte, soweit sie den Differentiierbarkeitsannahmen des § 2 genügen, auf geradlinige Typen zurückgeführt (§ 3). Man findet, daß jedes Sechseckgeflecht auf ein Geflecht aus Strahlenbüscheln topologisch abbildbar ist; es treten für die Bilder drei verschiedene Typen auf, und zwar α) vier Parallelenbüschel, β) drei Parallelen-

---

[2]) G. Thomsen, Un teorema topologico sulle schiere di curve e una caratterizzazione geometrica delle superficie isotermo-asintotiche, Bolletino dell' Unione Matematica Italiana **6** (1927), S. 80—85.

[3]) Vgl. [1]) § 1.

büschel und ein eigentliches Strahlenbüschel, γ) zwei Parallelenbüschel und zwei eigentliche Strahlenbüschel; diese drei Fälle sind auch im kleinen topologisch unabhängig (Satz 6). Schließlich werden noch unter geeigneten Differentiierbarkeitsannahmen Kennzeichen dafür gegeben, daß sich ein Geflecht auf die Type β) (und zugleich neuerdings als Grenzfall auf α)) abbilden läßt (Satz 7, Fig. 17, 16).

§ 1.

Abbildbarkeit von Kurvensystemen auf Parallelensysteme.

Damit ein Geflecht auf vier Parallelenbüschel abbildbar sei, müssen sicher zwei beliebig herausgegriffene Gewebe G_1, G_2 Sechseckgewebe sein; zwei solche Gewebe werden ferner immer ein gemeinsames Netz enthalten. Betrachtet man zwei Sechsecke (Fig. 2), von denen das eine zu G_1, das

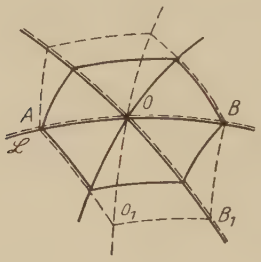

Fig. 2.

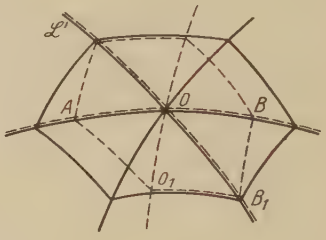

Fig. 3.

andere zu G_2 gehört, mit gemeinsamem Zentrum O und gemeinsamer Ecke A auf einer Systemkurve L, die dem gemeinsamen Netze angehört, so ist für die gewünschte Abbildbarkeit notwendig, daß die beiden Sechsecke die Kurve L im selben Punkte B zum zweiten Male schneiden, da man sofort feststellt, daß dies bei einem Parallelengeflecht zutrifft. Analoges muß offenbar auch bezüglich der zweiten durch O gehenden Kurve L' aus dem gemeinsamen Netze gelten (Fig. 3). Es soll bewiesen werden, daß die notwendigen Konfigurationen von Fig. 2, 3 für die Abbildbarkeit auch hinreichend sind, daß also folgender Satz besteht:

1. *Für die topologische Abbildbarkeit eines Geflechtes auf vier Parallelenbüschel ist notwendig und hinreichend, daß zwei Gewebe des Geflechtes Sechseckgewebe sind und daß je zwei hinreichend kleine, konzentrische Sechsecke dieser Gewebe auf einer den Geweben gemeinsamen Kurve entweder keine oder zwei gemeinsame Ecken haben.*

Durch eine topologische Abbildung kann erreicht werden, daß eines der beiden Sechseckgewebe G_1, G_2 in drei Parallelenbüschel übergeht. Es soll gezeigt werden, daß jede derartige Abbildung unter den Voraussetzungen

von Satz 1 auch die restliche im Geflechte enthaltene Schar in ein Parallelenbüschel verwandelt.

Benutzt man etwa eine Abbildung, welche G_1, dem die in Fig. 2, 3 ausgezogenen Kurven angehören mögen, in drei Parallelenbüschel transformiert, so kann man zunächst nur sagen, daß dabei die vierte Schar des Geflechtes in eine gewisse Schar S übergeht. Wählt man sodann im Anschlusse an die Konfiguration von Fig. 2 O_1 als Zentrum je eines Sechseckes aus G_1 und G_2 (Fig. 4), die beide durch B_1 hindurchgehen, so treffen sie sich im selben Punkte A_1 auf der Geraden $O_1 B_1$ wieder; dieser Punkt A_1 muß auf der durch A hindurchgehenden Kurve K_a aus S liegen. Wegen

$$\overline{OB} = \overline{OA} = \overline{O_1 B_1} = \overline{O_1 A_1}$$

ist

$$\overline{A_1 B_1} = \overline{AB}\,.$$

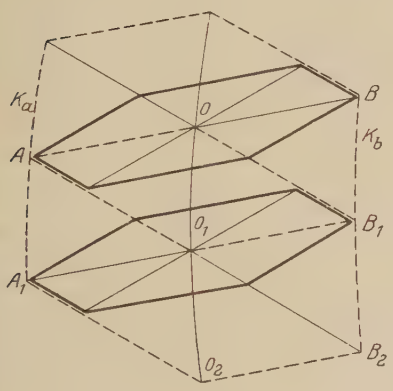

Fig. 4.

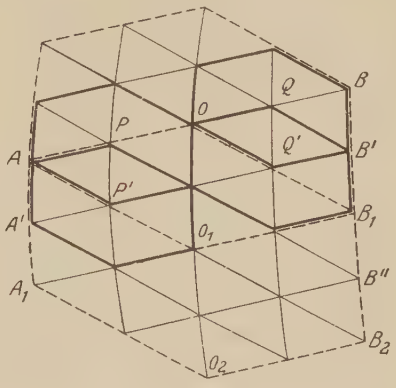

Fig. 5.

Konstruiert man nun zwei weitere Sechsecke, wobei O_2 und B_2 dieselbe Rolle wie früher O_1 und B_1 spielen, so wird man auf K_a einen Punkt A_2 finden, für den

$$\overline{A_2 B_2} = \overline{A_1 B_1}$$

ist. Fährt man so fort, so erhält man auf K_a und K_b, wenn K_b die Kurve aus S durch B ist, eine Reihe von Punkten $A, A_1 \ldots$ bzw. $B, B_1 \ldots$, für welche

$$\overline{A_i B_i} = \overline{AB}, \qquad A_i B_i \parallel AB \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

gilt. Daraus kann man folgern, daß alle Strecken, welche von K_a, K_b auf einer beliebigen zu AB parallelen Geraden herausgeschnitten werden, einander gleich sind. Man kann nämlich nach W. Blaschke[3]) mit den gestrichelten Sechsecken der Fig. 4 vom Sechseck mit dem Zentrum O aus eine „Wabe“ bilden, die sich in eine feinmaschigere Wabe aus Kurven des Gewebes, das bei der ursprünglichen Wabe verwendet wurde, unterteilen läßt. In Fig. 5 sind alle Linien dargestellt, die zugleich mit der

neuen Wabe auftreten, soweit sie innerhalb der gestrichelten Sechsecke der Fig. 4 liegen. Aus den in Fig. 5 hervorgehobenen Sechsecken mit den Mittelpunkten P, P' bzw. Q, Q' folgt wie vorhin

$$\overline{A'B'} = \overline{AB}.$$

Man erhält durch diese erste Unterteilung zwischen A und A_1, A_1 und A_2, ... und ebenso zwischen B und B_1, B_1 und B_2, ... je einen Punkt $A', A'' \ldots$ bzw. $B', B'' \ldots$, so daß wieder

$$\overline{A^{(i)}B^{(i)}} = \overline{AB}, \quad A^{(i)}B^{(i)} \parallel AB \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

wird. Fährt man mit der Unterteilung fort, so findet man immer neue zu AB parallele Gerade, auf welchen von K_a, K_b Strecken von der Länge AB abgegrenzt werden. Betrachten wir eine beliebige zu AB parallele Gerade, welche K_a, K_b in A^* bzw. B^* schneidet! Fallen A^*, B^* mit Punkten zusammen, die bei hinreichend fortgesetzter Unterteilung auftreten, was nur für beide gleichzeitig der Fall sein kann, so ist bereits

$$\overline{A^*B^*} = \overline{AB};$$

tritt dies nie ein, so ist A^* Häufungspunkt von Dreiecksecken, die bei fortgesetzter Unterteilung auf K_a auftreten [3]). Einer Folge von Eckpunkten auf K_a, die gegen A^* konvergiert, entspricht vermöge der Parallelen zu AB eine gewisse Folge von Eckpunkten auf K_b, die wegen der Stetigkeit von K_a, K_b gegen B^* konvergiert; dabei haben je zwei Punkte der Folgen auf K_a bzw. K_b, die auf derselben Parallelen liegen, die Entfernung $\overline{AB}$. Wäre nun

$$\overline{A^*B^*} = \overline{AB} \pm d \qquad (d > 0),$$

und würde man um A^* und B^* je einen kleinen Kreis vom Radius $\varepsilon < \frac{d}{2}$ beschreiben, so könnte wenigstens für eine der betrachteten Folgen kein Punkt im bezüglichen Kreise liegen, im Widerspruch damit, daß A^*, B^* Häufungspunkte dieser Folgen sind. Es muß somit auf jeder Parallelen zu AB von K_a, K_b dieselbe Strecke herausgeschnitten werden. Was für K_a, K_b gezeigt wurde, gilt für jedes andere Kurvenpaar aus S. *Die Schar S ist also eine Translationsschar*; die Verschiebung erfolgt in der festen Richtung AB.

Bisher wurde lediglich die Konfiguration der Fig. 2 benötigt. Nimmt man noch jene von Fig. 3 hinzu, so kann man sagen, daß S ein Parallelenbüschel sein muß. Es ist nach Fig. 6

$$\overline{OA_0} = (\overline{D_1C}) = \overline{O_1A} = (\overline{D_2C_1}) = \overline{O_2A_1} = \ldots .$$

Ferner wissen wir bereits, daß

$$\overline{O_0 A_0} = \overline{O A} = \overline{O_1 A_1} = \dots$$

ist, weshalb die Punkte $A_0, A, A_1, \dots$ auf einer Geraden liegen müssen. Unterteilt man nun wie in Fig. 5, so liegen die auf K_a neu auftretenden Punkte auf der nämlichen Geraden. Setzt man die Unterteilung fort, so erhält man bei jedem Schritt neue Punkte auf derselben Geraden. Betrachtet man einen beliebigen Punkt A^* auf K_a, so wird er entweder bei hinreichend weit durchgeführter Unterteilung als Eckpunkt eines Dreieckes auftreten und daher auf der Geraden liegen, oder er wird Häufungspunkt von Dreiecksecken auf K_a sein, die insgesamt auf der Geraden liegen. Läge nun A^* nicht auch darauf, so könnte man um ihn einen kleinen Kreis ziehen, der von der Geraden nicht getroffen wird; dies widerspricht aber der Eigenschaft von A^*, Häufungspunkt von Dreiecksecken auf der Geraden zu sein. Es gehört also jeder Punkt der Kurve der Geraden an oder die Kurve K_a ist wegen der vorausgesetzten Stetigkeit eine Gerade. Damit ist gezeigt, daß jede Abbildung, welche G_1 in drei Parallelenbüschel verwandelt, auch die vierte Schar S des Systems in ein Parallelenbüschel überführt.

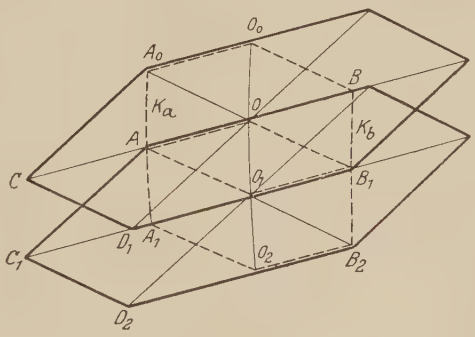

Fig. 6.

Treffen die Voraussetzungen von Satz 1 für zwei Gewebe zu, die anders liegen als bisher angenommen, so überzeugt man sich leicht, daß ein analoges Beweisverfahren angewendet werden kann, womit Satz 1 bewiesen ist. *Die Voraussetzungen von Satz 1 bewirken also bereits, daß alle Gewebe des Geflechtes Sechseckgewebe sind und daß die vier verschiedenen konzentrischen Sechsecke des Geflechtes, die einen gemeinsamen Punkt auf einer durch das Zentrum gehenden Systemkurve haben, sich in einem zweiten Punkt der nämlichen Kurve wieder treffen,* da dies beim Parallelengeflecht eintritt.

Wird ein Geflecht aus vier Parallelenbüscheln topologisch so abgebildet, daß drei seiner Büschel Parallelenbüschel bleiben, so folgt aus unserem Beweisverfahren, daß auch das vierte ein Parallelenbüschel bleibt; dies ergibt den

Satz 2. *Eine topologische Abbildung, die drei Parallelenbüschel in solche überführt, ist affin.*

Wird ein Geflecht aus zwei zueinander *diagonalen* Netzen N_1, N_2 gebildet, d. h. jedes Netzviereck aus N_1 mit einer Diagonale aus N_2 hat noch eine zweite Diagonale aus N_2 (oder umgekehrt), so stellt man leicht fest (Fig. 7), daß die Voraussetzungen von Satz 1 erfüllt sind. Es gilt also der von W. Blaschke[4]) angegebene

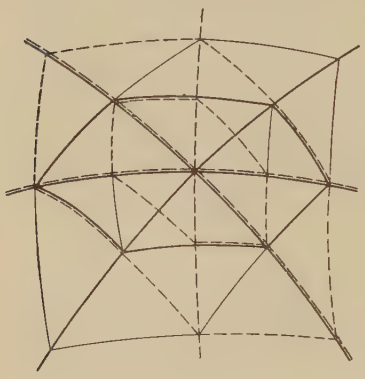

Fig. 7.

Satz 3. *Zwei zueinander diagonale Netze können durch eine topologische Abbildung gleichzeitig in Parallelogrammnetze übergeführt werden.*

Aus Satz 1 läßt sich durch den Schluß von n auf $n+1$ für n-fache Systeme folgender Satz gewinnen:

4. *Ein n-faches Kurvensystem ($n > 3$) ist dann und nur dann topologisch auf n Parallelenbüschel abbildbar, wenn die $n-2$ in ihm enthaltenen Gewebe mit demselben gemeinsamen Netze Sechseckgewebe sind und wenn zwei beliebige hinreichend kleine konzentrische Sechsecke dieser Gewebe auf einer Kurve des gemeinsamen Netzes entweder keine oder zwei gemeinsame Ecken haben.*

Es gelte der Satz bereits für ein n-faches System. Man kann dann bei einem $(n+1)$-fachen System durch eine topologische Abbildung erreichen, daß eines seiner $n-1$ n-fachen Systeme, die das gemeinsame Netz enthalten, in n Parallelenbüschel übergehen; die übrigbleibende Kurvenschar muß bei jeder solchen Abbildung auch ein Parallelenbüschel werden, da sie mit dem gemeinsamen Netze und einer beliebigen andern, ebenfalls bereits zu einem Parallelenbüschel gewordenen Schar in den Konfigurationsbeziehungen von Fig. 2, 3 steht. Da der Satz für $n=4$ gilt, gilt er allgemein und zwar unabhängig von der Lage des gemeinsamen Netzes.

Wir wollen die Sätze 1, 3, 4 noch einmal und zwar analytisch beweisen unter der Annahme, daß der in der Einleitung angegebene Satz von G. Thomsen mit den Voraussetzungen, wie sie W. Blaschke seinem Beweis zugrunde gelegt hat, bekannt sei. Obwohl einschränkende Voraussetzungen gemacht werden, scheinen die folgenden Betrachtungen nicht nur wegen ihrer Einfachheit bemerkenswert zu sein, sondern auch deswegen, weil sie die Unabhängigkeit der Voraussetzungen von Satz 1 und 4 erkennen lassen. Ferner wird die Beziehung (2) der Ausgangspunkt der

[4]) [1]) § 2

Untersuchungen von § 2 sein. — Variable und Funktionen werden reell vorausgesetzt.

In einem Parallelkoordinatensystem sei ein Parallelennetz durch die Büschel

$$(1) \qquad a_1 x + b_1 y = \text{konst.}, \quad a_2 x + b_2 y = \text{konst.} \quad (a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0)$$

gegeben. Man erhält alle Kurvenscharen, die zusammen mit (1) in irgend einem Gebiete ein Sechseckgewebe bilden, wenn man in allgemeinster Weise die Geraden eines von (1) verschiedenen Parallelenbüschels, soweit sie ein geeignetes Gebiet überdecken, topologisch so transformiert, daß die Geraden jedes der Büschel (1) aus diesem Gebiete wieder in Gerade desselben Büschels übergehen; dabei werden die Gebiete vor und nach der Transformation im allgemeinen verschieden sein. Es soll gezeigt werden, daß die gesuchten Scharen durch

$$(2) \qquad F_1(a_1 x + b_1 y) + F_2(a_2 x + b_2 y) = \text{konst.}$$

dargestellt werden, wo F_1, F_2 willkürliche, monotone, stetige Funktionen des gesamten Argumentes sind. Stellen nämlich

$$x = \xi(x^*, y^*), \qquad y = \eta(x^*, y^*)$$

eine derartige Transformation dar, so läßt sich jedem Wert C_1 bzw. C_2 der Konstanten der Scharen (1) in umkehrbar-eindeutiger, umkehrbar-stetiger Weise ein gewisser Wert $U_1(C_1)$ bzw. $U_2(C_2)$ so zuordnen, daß die Geraden

$$a_1 x + b_1 y = C_1 \quad \text{bzw.} \quad a_2 x + b_2 y = C_2$$

mit den Geraden

$$a_1 \xi(x, y) + b_1 \eta(x, y) = U_1(C_1) \quad \text{bzw.} \quad a_2 \xi(x, y) + b_2 \eta(x, y) = U_2(C_2)$$

zusammenfallen; es muß also

$$a_1 \xi(x, y) + b_1 \eta(x, y) = U_1(a_1 x + b_1 y),$$
$$a_2 \xi(x, y) + b_2 \eta(x, y) = U_2(a_2 x + b_2 y)$$

sein, woraus (2) sowie die angegebenen Eigenschaften von F_1, F_2 folgen.

Um die Sätze 1, 3 zu beweisen, denken wir uns etwa das Gewebe G_1 topologisch so in die drei Parallelenbüschel

$$x = \text{konst.}, \qquad y = \text{konst.}, \qquad x - y = \text{konst.}$$

übergeführt, daß das Netz, das die Gewebe G_1 und G_2 gemeinsam haben, in

$$x = \text{konst.}, \qquad y = \text{konst.}$$

übergeht. Die vierte Schar S des Systems geht in eine Schar über, deren Gleichung nach (2)

$$(3) \qquad F_1(x) + F_2(y) = \text{konst.}$$

sein muß. Die Inzidenzen von Fig. 2, 3 ergeben unabhängig von der Lage von S beziehungsweise die Bedingungen (vgl. Fig. 8, 9)

$$F_1(x+h)-F_1(x)=F_1(x)-F_1(x-h), \tag{4}$$

$$F_2(y+h)-F_2(y)=F_2(y)-F_2(y-h), \tag{5}$$

die für beliebiges (x, y) aus dem betrachteten Gebiete und für jeweils geeignet beschränktes $h>0$ gelten müssen. Setzt man voraus, F_1, F_2 hätten *stetige, zweite Differentialquotienten*, so kann man (4), (5) in der Gestalt

$$F_1''(x+\vartheta_1 h)=-F_1''(x-\vartheta_2 h) \qquad (0<\vartheta_i<1), \tag{6}$$

$$F_2''(y+\theta_1 h)=-F_2''(y-\theta_2 h) \qquad (0<\theta_i<1), \tag{7}$$

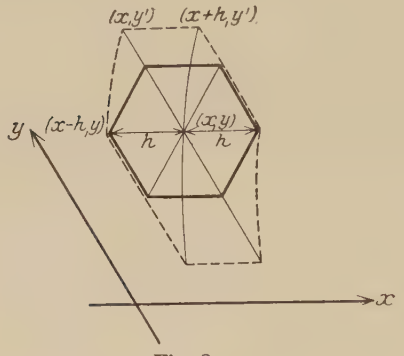

Fig. 8.

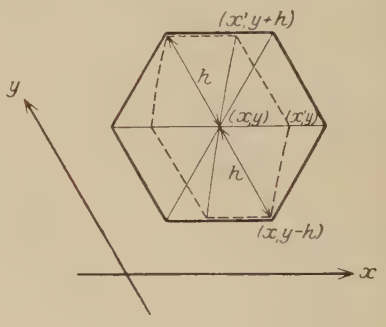

Fig. 9.

schreiben. Wählt man h klein genug, so haben wegen der Stetigkeit die Differentialquotienten in (6), (7) links und rechts jedesmal dasselbe Vorzeichen, weshalb (6), (7) nur für

$$F_1''(x)\equiv 0, \tag{8}$$

$$F_2''(y)\equiv 0 \tag{9}$$

bestehen können. Die Schar S ist also auch ein Parallelenbüschel. — Diese Betrachtung enthält bei Beschränkung auf geeignet differentiierbare Abbildungen auch den Beweis von Satz 2.

Man ist nun in der Lage festzustellen, daß die Voraussetzungen von Satz 1 *unabhängig* sind. In § 2 werden unter gewissen Differentiierbarkeitsannahmen alle Scharen bestimmt werden, welche mit den Netzen eines Parallelengewebes Sechseckgewebe bilden. Da neben den Parallelenbüscheln noch andere Scharen möglich sind, wäre die Voraussetzung, G_1 und G_2 seien lediglich Sechseckgewebe, für die Überführbarkeit unseres Geflechtes in vier Parallelenbüschel sicher nicht hinreichend. Nimmt man als weitere Voraussetzung *eine* Inzidenz an, wie sie Fig. 2 bzw. 8 oder 3

bzw. 9 darstellt, so erhält man nach (8) oder (9) und (3) eine Schar von der Form

$$A x + F_2(y) = \text{konst.} \quad \text{oder} \quad F_1(x) + B y = \text{konst.},$$

worin A, B Konstante bedeuten und F_1, F_2 im bisherigen Maße willkürlich sind, also im allgemeinen kein Parallelenbüschel, was aber nach Satz 2 immer der Fall sein müßte, wenn bereits eine der Konfigurationen von Fig. 2 oder 3 für die verlangte Abbildbarkeit hinreichen würde. *Es sind also die Voraussetzungen, unter denen Satz* 1 *bewiesen wurde, im allgemeinen unabhängig.*

Der analytische Beweis von Satz 4 sowie der Beweis für die Unabhängigkeit seiner Voraussetzungen läßt sich unter Verwendung des Schlusses von n auf $n+1$ ganz analog wie im Falle $n = 4$ führen.

§ 2.

Sechseckgeflechte.

Es sollen unter gleich anzugebenden Voraussetzungen *alle* Kurvenscharen der Ebene bestimmt werden, welche wenigstens in einem geeigneten etwa konvexen Gebiete G mit jedem Netz eines Parallelengewebes ein Sechseckgewebe bilden; dabei genügt es die Parallelenbüschel in der Gestalt

$$x = \text{konst.}, \quad y = \text{konst.}, \quad x + y = \text{konst.}$$

anzusetzen; jedes Sechseckgeflecht im Rahmen der Voraussetzungen muß einem Geflechte aus diesen drei Parallelenbüscheln und einer geeigneten der gesuchten Scharen topologisch äquivalent sein.

Nach (2) sind die gesuchten Scharen die Lösungen der simultanen Funktionalgleichungen

$$(10)\quad \begin{cases} F_1(x) + F_2(y) = \text{konst.}, \quad G_1(y) + G_2(x+y) = \text{konst.}, \\ H_1(x+y) + H_2(x) = \text{konst.}, \end{cases}$$

worin die Funktionssymbole monotone, stetige Funktionen des jeweiligen Argumentes anzeigen. *Es werde vorausgesetzt, die gesuchten Scharen seien in den verschiedenen Darstellungen* (10) *in* G *zweimal nach* x *und* y *differentiierbar.* Man ist daher in der Lage, die Ausdrücke

$$(11)\quad \begin{cases} \dfrac{dF_1}{dx} = f_1(x), & \dfrac{dF_2}{dy} = f_2(y), \\ \dfrac{dG_1}{dy} = g_1(y), & \dfrac{dG_2}{d(x+y)} = g_2(x+y), \\ \dfrac{dH_1}{d(x+y)} = h_1(x+y), & \dfrac{dH_2}{dx} = h_2(x) \end{cases}$$

zu bilden. Aus dem besondern Bau der Gleichungen (10) folgt, daß ihre linken Seiten eindeutige, stetige Funktionen von x und y mit stetigen,

ersten partiellen Differentialquotienten sind. Weil F_1, F_2, G_1, usw. monoton sein müssen, können die Ausdrücke (11) höchstens für diskrete Werte der Argumente verschwinden; analog kann in keinem Teilgebiete von G $g_1 + g_2$, $h_1 + h_2$ identisch Null sein; denn wäre z. B. $g_1 + g_2$ in einem gewissen Teile von G identisch Null, so müßte dort auch $f_2 \equiv 0$ sein; analog führt die Annahme $h_1 + h_2 \equiv 0$ auf $f_1 \equiv 0$. Wir wollen uns auf Gebiete beschränken, in denen die Ausdrücke (11) sowie $g_1 + g_2$, $h_1 + h_2$ nirgends Null sind. Die gesuchten Kurven sind dann überall differentiierbar.

Setzt man

$$\frac{1}{f_2} = \varphi(y), \quad \frac{g_1}{f_2} = \psi(y), \quad \frac{1}{f_1} = \chi(x), \quad \frac{h_2}{f_1} = \omega(x), \tag{12}$$

so genügen die gesuchten Scharen den Beziehungen

$$f_1 = \frac{g_2}{\varphi g_2 + \psi}, \quad f_2 = \frac{h_1}{\chi h_1 + \omega}, \tag{13}$$

welche ausdrücken, daß die Richtung einer Kurve aus (10) von der gewählten Darstellungsform unabhängig ist. Umgekehrt entsprechen jedem Lösungssystem von (12), (13), das über (11) auf Funktionen F_1, F_2, G_1 usw. führt, die in einem bestimmten Gebiete die vorausgesetzten Eigenschaften haben, gesuchte Kurvenscharen. *Die allgemeinste Lösung von* (12), (13) *enthält also alle gewünschten Scharen.*

Aus (13) folgt

$$\frac{dg_2(x+y)}{d(x+y)} = \frac{\varphi'}{\psi} g_2^2(x+y) + \frac{\psi'}{\psi} g_2(x+y), \tag{14}$$

$$\frac{dh_1(x+y)}{d(x+y)} = \frac{\chi'}{\omega} h_1^2(x+y) + \frac{\omega'}{\omega} h_1(x+y); \tag{15}$$

um diese Ausdrücke bilden zu können, wurde die Existenz der zweiten Differentialquotienten vorausgesetzt. Anschließend an (14) lassen sich die folgenden Fälle unterscheiden.

I. $\frac{dg_2}{d(x+y)}$ *verschwinde höchstens für diskrete Werte von* $x+y$. Dann folgt aus (14)

$$\frac{\varphi}{\psi} = \text{konst.}, \qquad \frac{\psi'}{\psi} = \text{konst.}$$

Man kann nämlich für $x + y$ zwei benachbarte Werte a_1, a_2 so verschreiben, daß die Geraden

$$s_1\colon \quad x + y = a_1, \qquad s_2\colon \quad x + y = a_2$$

durch G gehen und

$$g_2(a_1) \neq g_2(a_2)$$

ist. Durchläuft ein Punkt den Teil von s_1 bzw. s_2, der in G liegt, so wird seine Projektion auf die y-Achse, da G konvex sei, jeweils ein gewisses Intervall J_1 bzw. J_2 durchwandern; J_1 und J_2 werden ineinander reichen, wenn nur a_1 und a_2 hinreichend wenig verschieden gewählt sind. Für jedes y des gemeinsamen Intervalls J_{12} gilt dann

$$g_2'(a_1) = \frac{\varphi'}{\psi} g_2^2(a_1) + \frac{\psi'}{\psi} g_2(a_1), \qquad g_2'(a_2) = \frac{\varphi'}{\psi} g_2^2(a_2) + \frac{\psi'}{\psi} g_2(a_2),$$

woraus sich ergibt, daß $\frac{\varphi'}{\psi}, \frac{\psi'}{\psi}$ in J_{12} konstant sein müssen. Geht man von s_1 über s_2 hinaus zu einer benachbarten Geraden s_3 über, so findet man analog ein Intervall J_{23}, das mit J_{12} einen gemeinsamen Teil hat, falls s_3 nahe genug bei s_2 liegt, und das über J_{12} hinausreichen kann. Im Intervalle $J_{12} + J_{23}$ haben dann $\frac{\varphi'}{\psi}, \frac{\psi'}{\psi}$ dieselben konstanten Werte. Fährt man so fort, so kann man durch eine endliche Anzahl von Schritten jede Gerade $x + y = a$, die durch G geht, überschreiten, wie man sich leicht zurechtlegt, weshalb $\frac{\varphi'}{\psi}, \frac{\psi'}{\psi}$ in ganz G dieselben Konstanten sind.

a) $$\frac{\varphi'}{\psi} \neq 0, \qquad \frac{\psi'}{\psi} \neq 0.$$

Diese Annahme führt in gleich anzugebenden Gebieten auf die besonderen Lösungen

$$(16) \qquad \begin{cases} \ln|e^x + \sigma\tau| - \ln|e^{-y} + \sigma| = \text{konst.}, \\ \ln|e^y + \sigma| - \ln|-e^{x+y} + \tau| = \text{konst.}, \\ \ln|-e^{-(x+y)} + \tau| - \ln|e^{-x} + \sigma\tau| = \text{konst.}, \end{cases} \qquad (\sigma, \tau = \pm 1),$$

$$(17) \qquad \begin{cases} \sigma e^x - e^{-y} = \text{konst.} = a, \\ y - \ln|-e^{x+y} + \sigma| = \text{konst.}, \\ \ln|-e^{-(x+y)} + \sigma| + x = \text{konst.}, \end{cases} \qquad (\sigma = \pm 1),$$

woraus sich die allgemeinen durch die Transformationen

$$(18) \qquad x = c_0 x' + c_1, \qquad y = c_0 y' + c_2$$

ergeben. Schreibt man (16) in der Form

$$(19) \qquad \frac{e^x + \sigma\tau}{e^{-y} + \sigma} = a, \qquad \frac{e^y + \sigma}{-e^{x+y} + \tau} = b, \qquad \frac{-e^{-(x+y)} + \tau}{e^{-x} + \sigma\tau} = c,$$

so besteht zwischen den Konstanten der Zusammenhang

$$a = \frac{\tau b - \sigma}{b} = \frac{\tau}{1 - c\sigma};$$

die Gleichungen (17) lassen sich unmittelbar ineinander überführen.

Der Gang der Rechnung zur Herleitung von (16), (17) ist folgender: Man bestimmt φ, ψ und gewinnt aus (12) f_2, g_1; die Integration von (14)

ergibt g_2; hierauf liefert die erste Gleichung (13) f_1, also nach (12) auch χ; über h_1 und ω sind solche Annahmen zu machen, daß nach Berechnung von h_1 aus (15) die zweite Gleichung (13) einen Wert f_2 liefert, der durch geeignete Wahl der aufstrebenden Integrationskonstanten und Vorzeichen mit dem bereits gefundenen zur Übereinstimmung gebracht werden kann; es zeigt sich, daß nur die Annahme, h_1' verschwinde höchstens für diskrete Werte von $x+y$ und $\frac{\chi'}{\omega}$ sei eine von Null verschiedene Konstante, möglich ist; schließlich ergibt die letzte Gleichung (12) h_2; bei der Integration von (11) trennen sich die beiden Fälle (16), (17).

Im folgenden Teile dieses Paragraphen soll ein Parallelkoordinatensystem benützt werden, in dem die positive x- und y-Achse um $\frac{\pi}{3}$ gegeneinander geneigt sind.

Bezüglich des Gebietes gilt für die Scharen (16), daß die einzelnen Bestandteile den Voraussetzungen genügen für

$$\begin{aligned}
&\alpha) \quad \sigma = 1, \quad \tau = 1 \quad \text{in} \quad x+y \neq 0,\\
&\beta) \quad \sigma = 1, \quad \tau = -1 \quad \text{in} \quad x \neq 0,\\
&\gamma) \quad \sigma = -1, \quad \tau = -1 \quad \text{in} \quad y \neq 0,\\
&\delta) \quad \sigma = -1, \quad \tau = 1 \quad \text{in} \quad x \neq 0, \quad y \neq 0, \quad x+y \neq 0.
\end{aligned}$$

Man überzeugt sich leicht, daß die Schar $\alpha)$ durch eine Spiegelung an der x- bzw. y-Achse in $\beta)$ bzw. $\gamma)$ übergeht, während sie durch eine Spiegelung an $x+y=0$ in sich übergeführt wird; die Schar $\delta)$ geht durch eine Spiegelung an $x=0$, $y=0$, $x+y=0$ jeweils in sich über. Es genügt daher die Scharen $\alpha)$ und $\delta)$ zu untersuchen, wozu jedesmal die erste Darstellung (19) verwendet werden möge.

Bei der Schar $\alpha)$ (Fig. 10) muß a positiv sein; für $a>1$ liegen die Kurven oberhalb der Geraden $x+y=0$, für $a<1$ unterhalb; für $a \to 1$ rückt die Kurve in die auszuschließende Gerade $x+y=0$, während sie für $a \to 0$ oder $+\infty$ im Unendlichen verschwindet. Wegen der Symmetrie genügt es, etwa $a>1$ anzunehmen. Greift man die Kurve K mit $a=2$ heraus, so hat sie die positive y-Achse und den absteigenden Teil von $x+y=\ln 2$ zu Asymptoten und ist symmetrisch bezüglich $y=\ln 2$. *Die Schar besteht aus lauter kongruenten Kurven* und der Teil $a>1$ wird von K beschrieben, wenn man die Ebene einer *Translation* unterwirft, bei der der Schnittpunkt P der Asymptoten eine gewisse Kurve A durchwandert. A hat die positive x-Achse und den ansteigenden Teil von $x+y=0$ zu Asymptoten und ist mit K identisch; K und A haben im Koordinatensystem ihrer Asymptoten die Gleichung

$$e^{-\xi}+e^{-\eta}=1. \tag{20}$$

In Fig. 10 sind drei nicht geradlinige Geflechtssechsecke gezeichnet; spiegelt man etwa das obere an $x+y=0$, so erhält man unterhalb dieser Geraden die verschiedenen Arten. Eine ähnliche Bemerkung gilt auch für die Figuren 11 und 14.

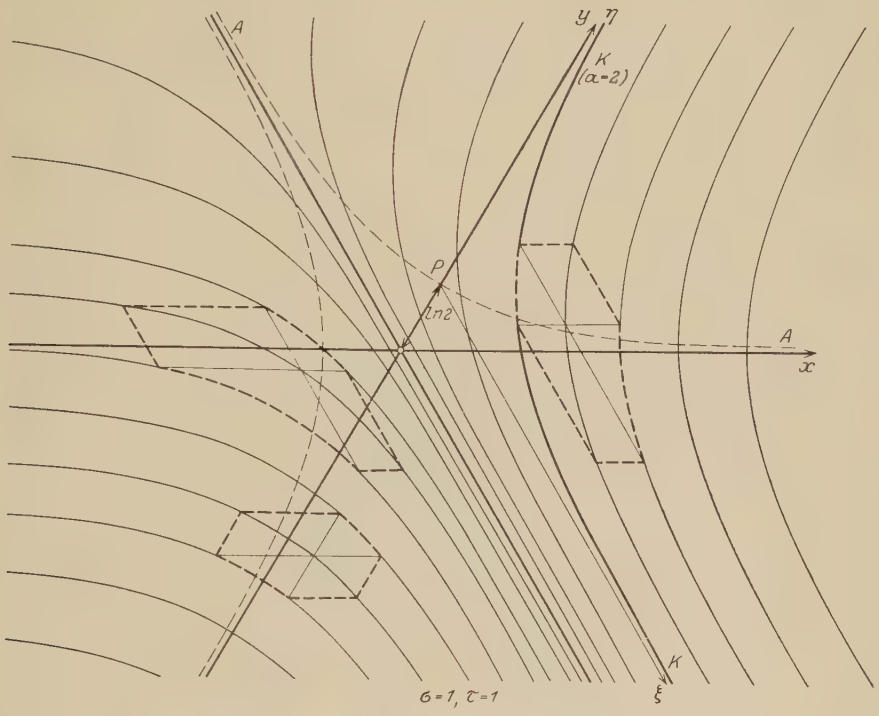

Fig. 10.

Im Falle δ) (Fig. 11) liegen die Kurven für $-\infty < a < 0$ in den beiden Sextanten zwischen $y=0$, $x=0$, für $0<a<1$ zwischen $x=0$, $x+y=0$ und für $1<a<+\infty$ zwischen $x+y=0$, $y=0$; rückt der Parameter nach den Grenzen der Intervalle, so wandern die Kurven in die auszuschließenden Geraden. *Die Kurven der Schar sind in* α) *identisch*, gehen aber insgesamt durch den Koordinatenanfang. Wegen der Symmetrie genügt es, die Teilschar $1<a<+\infty$ zu untersuchen. Wählt man wieder $a=2$, so hat die entsprechende Kurve K die zur negativen x-Achse parallele Gerade $y=\ln 2$ und den absteigenden Teil von $x+y=\ln 2$ zu Asymptoten; die Teilschar entsteht aus K durch eine *Translation*, bei der der Asymptotenschnittpunkt P eine Kurve A beschreibt, die wieder mit K kongruent ist und die positive x-Achse und den ansteigenden Teil von $x+y=0$ als Asymptoten hat; bei dieser Translation schiebt sich K fortwährend durch den Koordinatenanfang.

Die Scharen (17) genügen den Voraussetzungen für

$$\alpha) \quad \sigma = 1 \qquad \text{in} \qquad x + y \neq 0,$$

$$\beta) \quad \sigma = -1 \quad \text{in der ganzen Ebene.}$$

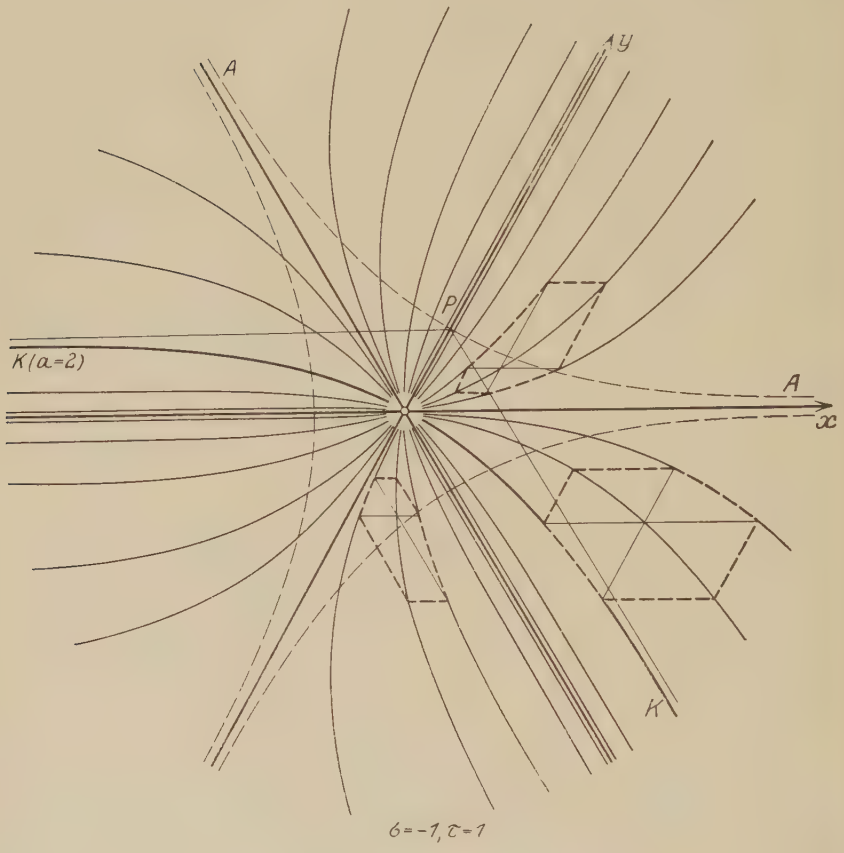

Fig. 11.

In beiden Fällen sind die Scharen symmetrisch zu $x + y = 0$ und bestehen aus den *bisherigen Kurven* (20). Wir knüpfen an die erste Darstellung (17) an.

Im Falle α) (Fig. 12) liegen die Kurven für $0 < a < +\infty$ oberhalb von $x + y = 0$ und für $-\infty < a < 0$ unterhalb; geht $a \to 0$, so rückt die Kurve in die auszuschließende Gerade $x + y = 0$, für $a \to +\infty$, $-\infty$ verschwindet die Kurve im Unendlichen. Wegen der Symmetrie genügt es, etwa $a > 0$ anzunehmen. Alle Kurven haben die gemeinsame Asymptote $x + y = 0$, der sie sich im absteigenden Teil nähern; die zweite Asymptote

ist parallel zur positiven y-Achse. Die Teilschar entsteht aus einer Kurve K $(a = 1)$ durch eine *Translation*, bei der der Schnittpunkt P der Asymptoten die Gerade $x + y = 0$ durchläuft.

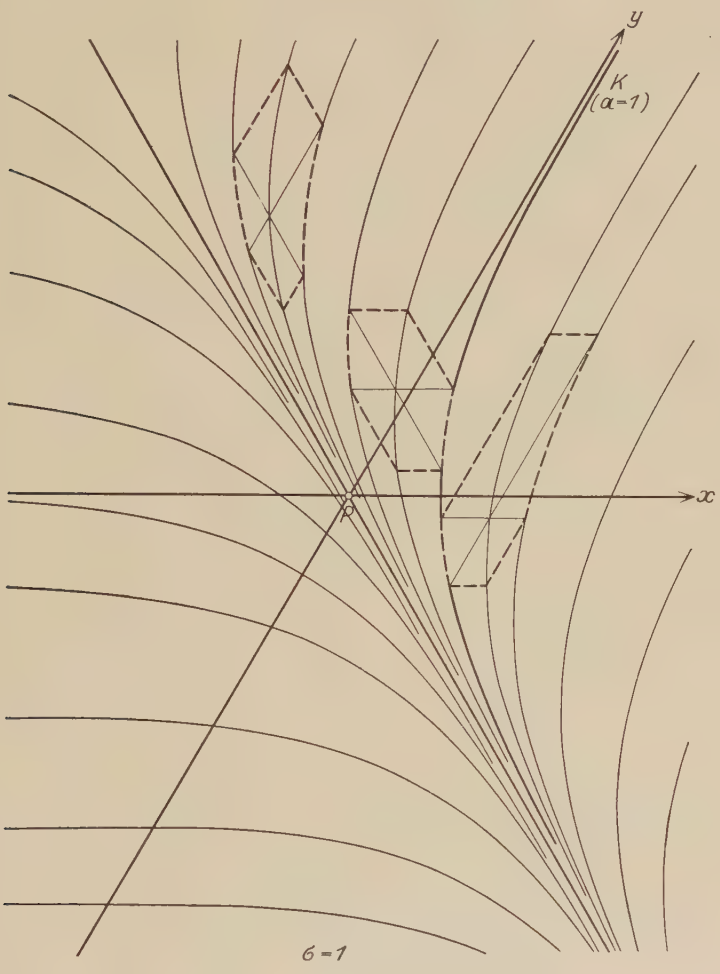

Fig. 12.

Um alle Kurven von β) (Fig. 13) zu erhalten, muß a alle negativen Zahlen durchlaufen. Eine Spiegelung an $x + y = 0$ führt jede Kurve in sich über. Die Asymptoten sind parallel der negativen x- bzw. positiven y-Achse. Die Schar entsteht aus K $(a = -1)$ durch eine *Translation*, bei der P die Gerade $x + y = 0$ durchwandert.

Man legt sich an Hand der Abbildungen leicht zurecht, wie diese beiden Fälle als Grenzfälle von (16) α) auftreten. Es fällt auf, daß die

Scharen, die aus (17) α), β) durch Spiegelung an der x- bzw. y-Achse entstehen, hier nicht vorkommen; diese Lücke wird gerade durch Ic) und IIa) ausgefüllt.

b) $$\frac{\varphi'}{\varphi} \neq 0, \qquad \frac{\psi'}{\psi} = 0.$$

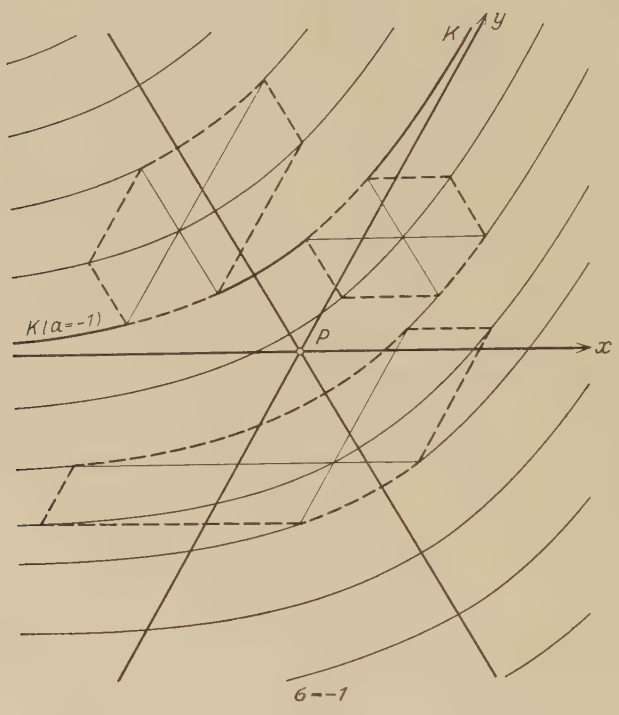

Fig. 13.

Die Annahme führt auf das besondere Lösungssystem

$$(21) \qquad \begin{cases} \ln|x| - \ln|y| = \text{konst.}, \\ \ln|y| - \ln|x+y| = \text{konst.}, \\ \ln|x+y| - \ln|x| = \text{konst.}, \end{cases}$$

woraus man das allgemeine durch eine beliebige Translation herleitet. Die Bestandteile von (21) genügen den Voraussetzungen in $x \neq 0$, $y \neq 0$, $x+y \neq 0$. Man erhält also die eigentlichen Strahlenbüschel (Fig. 14). Dieser Fall kann als Grenzfall von Iδ) angesehen werden. Aus Fig. 14 kann man auch entnehmen, daß sich wie in Fig. 2, 3 *für das gewählte gemeinsame Netz* die Sechsecke zwar schließen, aber weder die Eckpunktsinzidenz von Fig. 2 noch von Fig. 3 stattfindet.

c) $$\frac{\varphi'}{\varphi} = 0, \qquad \frac{\psi'}{\psi} \neq 0.$$

Man findet die besondere Lösung

$$(22)\qquad \begin{cases} \ln|e^x - \sigma| + y = \text{konst.}, \\ -\sigma e^y + e^{x+y} = \text{konst.}, \\ x + y + \ln|e^{-x} - \sigma| = \text{konst.}, \end{cases} \qquad (\sigma = \pm 1),$$

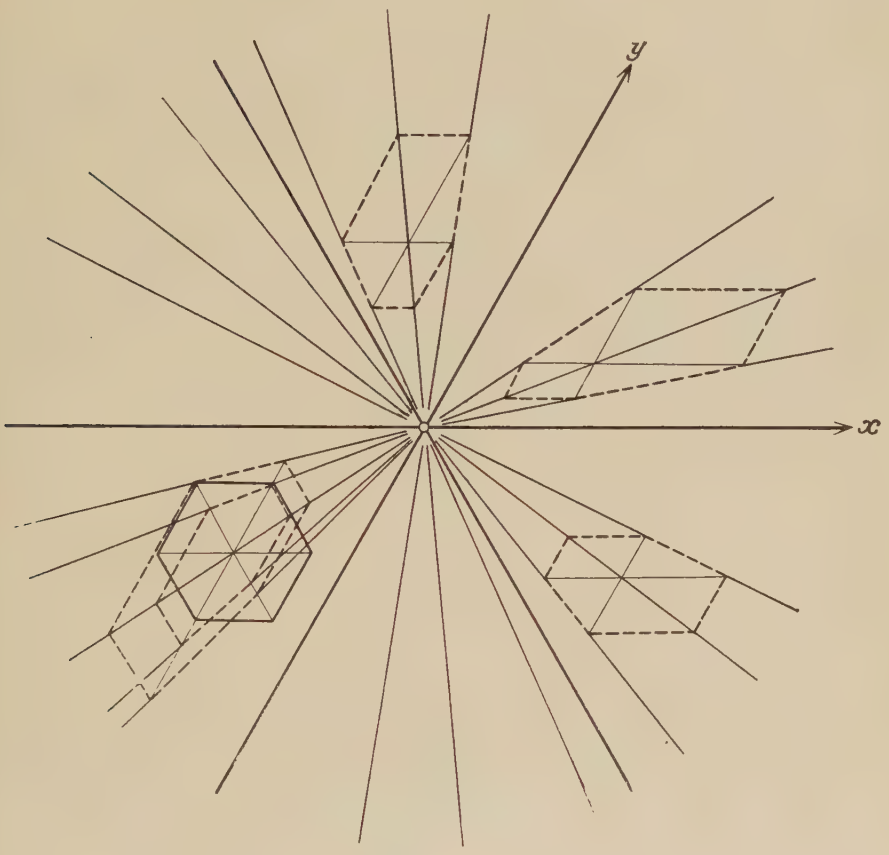

Fig. 14.

woraus sich die allgemeine mittels der Transformationen (18) ergibt. Für $\sigma = 1$ treffen die Voraussetzungen in $x \neq 0$, für $\sigma = -1$ überall zu. Es zeigt sich, daß (22) die an der x-Achse gespiegelten Scharen (17) darstellt.

II. $$\frac{dg_2}{d(x+y)} \equiv 0.$$

Die Gleichung (14) reduziert sich auf

$$\varphi' g_2 + \psi' = 0,$$

woran sich zwei Unterfälle schließen.

a) *φ' verschwinde in G nirgends.*

Man findet die besondere Lösung

$$(23)\qquad \begin{cases} -x + \ln|e^{-y} - \sigma| = \text{konst.}, \\ \ln|e^{y} - \sigma| - (x+y) = \text{konst.}, \\ e^{-(x+y)} - \sigma e^{-x} = \text{konst.}, \end{cases} \qquad (\sigma = \pm 1),$$

woraus mittels (18) wieder die allgemeine entsteht. Für $\sigma = 1$ sind die Voraussetzungen in $y \neq 0$ erfüllt, für $\sigma = -1$ überall. Die Scharen (23) füllen die noch übriggebliebene Unsymmetrie aus, da sie die an der y-Achse gespiegelten Scharen (17) sind.

b) $$\varphi' \equiv 0.$$

Man erhält die von den Grundbüscheln verschiedenen Parallelenbüschel.

Um zu zeigen, daß hiermit alle Möglichkeiten erschöpft sind, hat man nur noch festzustellen, daß es keine den Voraussetzungen genügende Scharen gibt, welche der Annahme entsprechen,

$$\frac{d\,g_2}{d\,(x+y)} \text{ } \textit{verschwinde in Teilgebieten von } G.$$

Zusammengefaßt erhält man folgenden Satz

5. *Eine Schar bildet mit jedem Netz aus*

$$x = \text{konst.}, \quad y = \text{konst.}, \quad x + y = \text{konst.}$$

dann und nur dann ein Sechseckgewebe, wenn sie eine Lösung von

$$F_1(x) + F_2(y) = \text{konst.}, \qquad G_1(y) + G_2(x+y) = \text{konst.},$$
$$H_1(x+y) + H_2(x) = \text{konst.}$$

ist, wo F_1, F_2, G_1 usw. monoton und stetig sind. Hat die Schar in dieser Darstellung zweite Differentialquotienten, so ist sie entweder ein (eigentlicher oder uneigentlicher) Strahlenbüschel oder läßt sich aus

$$\frac{e^{x}+\sigma}{e^{-y}+\sigma} = \text{konst.}, \qquad \sigma e^{x} - e^{-y} = \text{konst.} \qquad (\sigma = \pm 1)$$

mittels einer Translation, einer Ähnlichkeit und einer Spiegelung an einem Strahl der Grundbüschel herleiten, falls die Koordinatenachsen um $\frac{\pi}{3}$ gegeneinander geneigt sind. Die Darstellung gilt für die ganze Ebene; ausgenommen sind höchstens einzelne Strahlen der Grundbüschel, wenn sie als Grenzlage einer Kurve der Schar auftreten.

In § 1 war vorweggenommen, daß ein vierfaches System mit zwei Sechseckgeweben nicht auf vier Parallelenbüschel abbildbar zu sein braucht. Man erkennt aus den Entwicklungen des vorliegenden Paragraphen, *daß*

sogar die Voraussetzung, alle Gewebe des Systems seien Sechseckgewebe, für die Abbildbarkeit auf vier Parallelenbüschel nicht hinreichen würde, da neben den Parallelenbüscheln noch andere Scharen möglich sind, welche mit jedem Netz eines Parallelengewebes ein Sechseckgewebe bilden.

§ 3.

Typen der Sechseckgeflechte.

In § 2 wurden unter gewissen Differentiierbarkeitsannahmen *alle* Scharen bestimmt, welche mit den Netzen des Parallelengewebes P $(x, y, x+y = \text{konst.})$ Sechseckgewebe bilden; das Ergebnis wurde in Satz 5 zusammengefaßt; diese Scharen sind daher innerhalb der Voraussetzungen die einzigen, welche zusammen mit P ein Sechseckgeflecht bilden. Wir stellen uns die Aufgabe, diese Geflechte auf ihre topologische Abhängigkeit zu untersuchen und nach Möglichkeit auf unabhängige, geradlinige Typen zurückzuführen. Dabei genügt es natürlich, die in Satz 5 explizit angegebenen Scharen zu betrachten. Der bequemeren Ausdrucksweise halber werde das Koordinatensystem, dessen Achsen um $\frac{\pi}{3}$ gegeneinander geneigt sind, beibehalten.

a) $\dfrac{e^x-1}{e^{-y}-1} = \text{konst.}, \quad P \quad (x \neq 0, y \neq 0, x+y \neq 0)$ (Fig. 11)

wird durch die ausgeschlossenen Geraden in sechs äquivalente Teile zerlegt; durch die Abbildung

$$e^x = \frac{x^*+1}{y^*+1}, \qquad e^{-y} = \frac{1}{y^*+1}$$

geht das Geflecht, falls statt x^*, y^* wieder x, y geschrieben wird, in

(24) $\qquad \dfrac{y}{x} = \text{konst.}, \quad \dfrac{y+1}{x+1} = \text{konst.}, \quad y = \text{konst.}, \quad x = \text{konst.}$

über. Bezeichnet man die Sextanten der Fig. 11 mit I bis VI, indem man mit jenem zwischen den positiven Koordinatenachsen beginnt und im positiven Sinne weiterfährt, so entsprechen ihnen im Bilde die gleich numerierten Gebietsteile der Fig. 15; aus Symmetriegründen bei Fig. 11 folgt, daß die Geflechte in I bis VI der Fig. 15 einander äquivalent sind; dasselbe gilt wegen der Symmetrie in Fig. 15 für die Geflechte in I bis X; daß aber auch die Geflechte in XI, XII den bisherigen gleichwertig sind, kann folgendermaßen gezeigt werden: durch die projektive Transformation

$$x = \frac{x^*}{-x^*+y^*+2}, \qquad y = \frac{x^*-1}{-x^*+y^*+2}$$

wird das Geflecht in XI auf ein Geflecht innerhalb des Dreieckes ABC derart abgebildet, daß die Parallelen zur x-Achse in Gerade durch C, die

Parallelen zur y-Achse in Gerade durch B, ferner die Geraden durch $S_1(0, 0)$ in Parallele zur y-Achse und die Geraden durch $S_2(-1, -1)$ in Parallele zur x-Achse übergehen; durch eine geeignete Spiegelung läßt sich dieses Bild in das Geflecht V überführen; XI und XII sind sym-

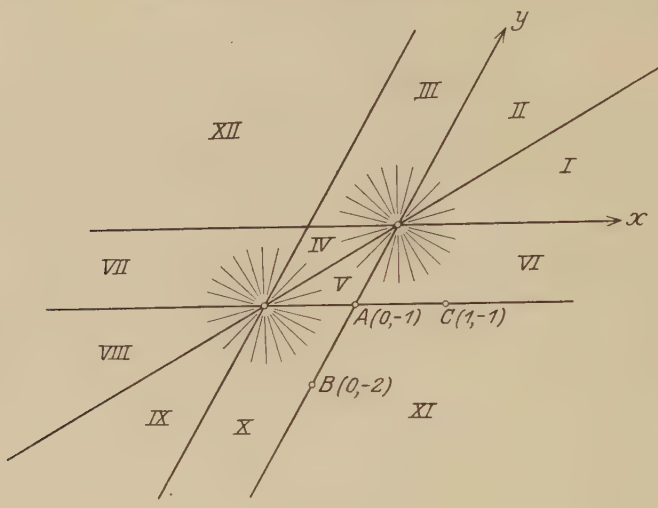

Fig. 15.

metrisch. Mittels einer affinen Transformation kann man den Parallelenbüscheln eine beliebige Richtung und den Scheiteln eine beliebige Lage erteilen. Man erhält jeweils zwölf Gebiete als Träger äquivalenter Geflechte; die Gebietsgrenzen sind die Verbindungslinie der beiden Scheitel und die durch die Scheitel gehenden Strahlen der Parallelenbüschel

b) $$\frac{e^x+1}{e^{-y}+1} = \text{konst.}, \quad P \qquad (x+y \neq 0) \quad \text{(Fig. 10)}$$

wird durch $x + y = 0$ in zwei gleichwertige Teile zerlegt; durch die Abbildung

$$e^x = x^*, \qquad e^{-y} = y^*$$

geht dieses Geflecht derart in ein Geflecht (27) über, daß die Teile oberhalb bzw. unterhalb von $x + y = 0$ auf I bzw. II in Fig. 15 abgebildet werden.

c) $$e^x - e^{-y} = \text{konst.}, \quad P \qquad (x+y \neq 0) \quad \text{(Fig. 12)}$$

wird wieder durch $x + y = 0$ in zwei äquivalente Teile zerlegt; durch die Transformation

$$e^x = x^* + y^*, \qquad e^{-y} = y^*$$

erhält man

(25) $$x = \text{konst.}, \quad x + y = \text{konst.}, \quad y = \text{konst.}, \quad \frac{y}{x} = \text{konst.}$$

Dem Teile oberhalb bzw. unterhalb von $x + y = 0$ im Original entspricht der erste bzw. zweite Sextant des Bildes. Natürlich sind im Bilde die Geflechte innerhalb aller Sextanten einander gleichwertig. Mittels einer affinen Transformation läßt sich wieder den Parallelenbüscheln eine beliebige Richtung und dem Scheitel eine beliebige Lage vorschreiben; wie früher sind Strahlen, die zu zwei verschiedenen Scharen gehören, Gebietsgrenzen. Wie es sein muß, wird die Kurvenschar ein Parallelenbüschel und eines der Parallelenbüschel ($x + y = \text{konst.}$) ein eigentliches Strahlenbüschel.

d) $e^x + e^{-y} = \text{konst.}$, P (Fig. 13)

geht durch

$$e^x = x^*, \qquad e^{-y} = y^*$$

in (25) so über, daß die ganze Ebene auf den ersten Sextanten abgebildet wird.

e) Die Geflechte mit einem eigentlichen Strahlenbüschel sind damit auch schon erledigt, so daß nur noch die Geflechte aus vier Parallelenbüscheln übrigbleiben; sie sind untereinander im allgemeinen nicht gleichwertig; ausnahmslos gilt die Äquivalenz für Parallelengeflechte, die aus zwei diagonalen Netzen bestehen.

Man erhält also die drei folgenden *projektiv unabhängigen Typen*:

α) *vier Parallelenbüschel*;

β) *drei Parallelenbüschel, ein eigentliches Strahlenbüschel*;

γ) *zwei Parallelenbüschel, zwei eigentliche Strahlenbüschel.*

Wir werden beweisen, daß diese Geflechte innerhalb eines beliebigen Gebietes auch *topologisch unabhängig* sind. Nimmt man diese Unabhängigkeit vorweg, so lassen sich die bisherigen Ergebnisse in den folgenden Satz zusammenfassen:

6. *Ein Sechseckgeflecht ist auf ein Geflecht aus Strahlenbüscheln abbildbar; die projektiv unabhängigen Bilder sind auch topologisch unabhängig.*

In die Ableitung dieses Satzes gehen die *Differentiierbarkeitsannahmen* von § 2 ein.

Daß die beiden Fälle α), β) topologisch verschieden sind, läßt sich auf folgende Art erkennen: Zwei beliebige Gewebe eines Geflechtes α) stehen in den Konfigurationsbeziehungen von Fig. 2, 3; bei einem Geflechte β) dagegen lassen sich (auf drei verschiedene Arten) zwei Gewebe so wählen (Fig. 14), daß die Inzidenzen der Sechsecksecken von Fig. 2, 3 niemals zutreffen. Man beachte, daß in Fig. 14 das gemeinsame Netz der

gewählten Gewebe ein Parallelennetz ist. Die Unterscheidung von α) und β) läßt sich noch auf andere Weise führen. Wie schon in § 1 (S. 733) angeführt wurde, gilt für ein Parallelengeflecht, daß sich alle konzentrischen Sechsecke mit einem gemeinsamen *Punkte A* auf einer durch das Zentrum O gehenden Geraden des Geflechtes in *einem* Punkte B derselben Geraden wieder treffen (Fig. 16)[5]; dabei sind alle vier Parallelenbüschel gleichberechtigt. Bei einem Geflecht β) kommt dem eigentlichen Büschel eine

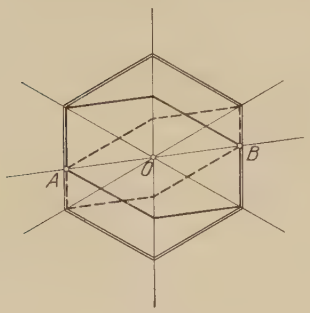

Fig. 16.

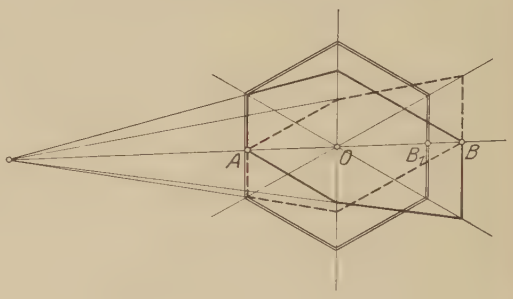

Fig. 17.

ausgezeichnete Rolle zu; alle konzentrischen Sechsecke mit gemeinsamer *Ecke A* auf einem Strahl des eigentlichen Büschels — und zwar nur auf einem solchen Strahle — treffen sich im selben Punkte B des nämlichen Strahles wieder (Fig. 17)[5]; dagegen schneidet das mit diesen konzentrische (doppelt ausgezogene) Sechseck durch A, dessen Seiten dem Parallelengewebe angehören, den Strahl AO zum zweiten Male in einem von B verschiedenen Punkte B_1. In dieser Trennung der Punkte B, B_1 liegt aber die topologische Verschiedenheit von α), β).

Ähnlich beweist man, daß γ) von α) und β) verschieden ist. Man stellt nämlich leicht fest, daß zwei konzentrische Sechsecke mit gemeinsamer Ecke auf *irgendeiner* durch das Zentrum gehenden Geflechtsgeraden auf dieser Geraden niemals eine weitere zusammenfallende Ecke haben.

Es soll unter geeigneten *Differentiierbarkeitsannahmen* noch gezeigt werden, daß die notwendigen Konfigurationen von Fig. 16 bzw. 17 für die Abbildbarkeit eines Geflechtes auf ein Parallelengeflecht bzw. auf ein Parallelengewebe und ein eigentliches Strahlenbüschel auch hinreichend sind, daß also folgender Satz gilt:

7. *Ein Geflecht ist dann und nur dann auf ein Parallelengewebe und ein (eigentliches oder uneigentliches) Strahlenbüschel abbildbar, wenn*

[5]) Das dritte Sechseck mit der Ecke A, das ebenfalls nach B kommt, ist nicht eingezeichnet.

es drei Sechseckgewebe G_1, G_2, G_4 mit folgenden Eigenschaften enthält: Zwei konzentrische Sechsecke aus G_1, G_2 haben auf jeder Kurve der einen den Geweben G_1, G_2 gemeinsamen Schar S_1 entweder keine oder zwei gemeinsame Ecken; G_4 ist das Gewebe, das die Schar S_1 nicht enthält.

Es sollen die von S_1 verschiedenen Scharen des Geflechtes in irgendeiner Reihenfolge mit S_2, S_3, S_4 bezeichnet werden. Das Geflecht werde zunächst so transformiert, daß $G_1(S_1, S_2, S_3)$ in ein Parallelengewebe $G_1^*(S_1^*, S_2^*, S_3^*)$ übergeht, das wir in der Gestalt

$$x^* = \text{konst.}, \quad y^* = \text{konst.}, \quad x^* + y^* = \text{konst.}$$

ansetzen, wobei $y^* = \text{konst.}$ die Schar S_1^* sei. Wegen der Inzidenzen bei den konzentrischen Sechsecken aus G_1^*, G_2^* (Fig. 16, 17) muß nach analogen Überlegungen wie in § 1 bei Fig. 4, 5 die Schar S_4^* eine *Translationsschar* sein, die durch Verschiebung einer Kurve in der x-Richtung entsteht. S_4^* hat somit die Gestalt

$$x^* + F(y^*) = \text{konst.}$$

mit monotonem, stetigen $F(y^*)$. Man entnimmt dieser Gleichung, *daß eine Translationsschar mit fester Verschiebungsrichtung mit dem Parallelenbüschel dieser Richtung und einem beliebigen anderen Parallelenbüschel ein Sechseckgewebe bildet.* Insbesondere ist also auch das restliche Gewebe G_3 unseres Geflechtes, über das keine Voraussetzungen gemacht wurden, ein Sechseckgeflecht. Man überzeugt sich leicht, daß ein Sechseck dieses Gewebes mit einer Ecke A und dem Zentrum O auch nach B kommt (Fig. 16, 17; vgl. auch Fußnote [5]). Da voraussetzungsgemäß G_4^*

$$x^* = \text{konst.}, \quad x^* + y^* = \text{konst.}, \quad x^* + F(y^*) = \text{konst.}$$

ein Sechseckgewebe sein soll, muß es sich durch eine geeignete Abbildung in das Parallelengewebe

$$\bar{x} = \text{konst.}, \quad \bar{x} + \bar{y} = \text{konst.}, \quad \bar{y} = \text{konst.}$$

überführen lassen; die Transformationsgleichungen werden die Form

$$x^* = -\varphi(\bar{x}), \qquad y^* = \varphi(\bar{x}) + \psi(\bar{x} + \bar{y}) \tag{26}$$

haben und der Funktionalgleichung

$$\varphi(\bar{x}) + \omega(\bar{y}) = F[\varphi(\bar{x}) + \psi(\bar{x} + \bar{y})] \tag{27}$$

genügen. Diese Gleichung drückt ja aus, daß $x^* + F(y^*) = \text{konst.}$ durch die Abbildung (26) in das Büschel $\bar{y} = \text{konst.}$ übergehen soll. Die durch die Inzidenzen ausgezeichnete Schar S_1^* $(y^* = \text{konst.})$ geht in $\bar{S}_1$

$$\varphi(\bar{x}) + \psi(\bar{x} + \bar{y}) = \text{konst.} \tag{28a}$$

über und kann nach (27) auch in der Gestalt

$$\varphi(\bar{x}) + \omega(\bar{y}) = \text{konst.} \tag{28b}$$

geschrieben werden. Mit denselben Differentiierbarkeitsannahmen und durch eine einfache, analoge Rechnung wie in § 2 folgt hieraus, daß $\bar{S}_1$ ein eigentliches oder uneigentliches Strahlenbüschel wird, je nachdem ob B von B_1 verschieden ist (Fig. 17) oder nicht (Fig. 16). Setzt man also G_4 als Parallelengewebe voraus, so bewirken die Inzidenzen von Fig. 16 bzw. 17, daß zugleich S_1 ein uneigentliches oder eigentliches Strahlenbüschel wird.

Hamburg, Mathematisches Seminar, Anfang Januar 1928.

(Eingegangen am 11. Januar 1928.)

Berichtigung

zu der Abhandlung von L. Lichtenstein, Über einige Existenzprobleme der Hydrodynamik. Dritte Abhandlung, S. 387—415.

Auf Seite 411 ist die zweite Formel (106) durch die Ungleichheiten

$$\left|\frac{\partial^2\varphi}{\partial l\,\partial m}\right|, \ldots \leqq \delta_0; \qquad \left|\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial l\,\partial m}\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial l\,\partial m}\right)^{(2)}\right|, \ldots \leqq \delta_0\, d_{12}^{\lambda}$$

zu ergänzen. Hierin bezeichnen $\frac{\partial}{\partial l}$, $\frac{\partial}{\partial m}$, $\frac{\partial^2}{\partial l\,\partial m}$ Ableitungen in bezug auf die beiden Gaußschen Parameter der Fläche.

Aus den Neuerscheinungen

VERLAG VON JULIUS SPRINGER IN BERLIN W 9

Fluorescenz und Phosphorescenz im Lichte der neueren Atomtheorie

Von **Peter Pringsheim**

Dritte Auflage. Mit 87 Abbildungen. VII, 357 Seiten. 1928
RM 24.—; gebunden RM 25.20

(Bildet Band VI der Struktur der Materie)

Inhaltsverzeichnis: Einleitung. — Resonanzstrahlung. — Fluorescenz- und Resonanzspektra zweiatomiger Moleküle. — Leuchtdauer und Polarisation der Fluorescenzstrahlung von Gasen und der Einfluß magnetischer und elektrischer Felder. — Störung der Resonanzstrahlung durch Zusammenstöße. — Die Fluorescenz und Phosphorescenz flüssiger und fester Substanzen. — Fluorescenz und Phosphorescenz organischer Verbindungen. — Luminescenz komplexer anorganischer Moleküle. — Durch Fremdatome aktivierte anorganische Phosphore (Kristallphosphore).

Sterne und Atome

Von **A. S. Eddington**

M. A., L. L. D., D. Sc., F. R. S.
Plumian Professor der Astronomie an der Universität Cambridge

Mit Ergänzungen des Autors ins Deutsche übertragen von

Dr. **O. F. Bollnow**, Göttingen

Mit 11 Abbildungen. V, 124 Seiten. 1928. RM 5.60; gebunden RM 6.80

Inhaltsverzeichnis: Erste Vorlesung. Das Innere eines Sterns: Die Temperatur im Innern. — Die Ionisation der Atome. — Strahlungsdruck und Masse. — Das Innere eines Sterns. — Die Undurchsichtbarkeit der Sternmaterie. — Die Beziehung zwischen Helligkeit und Masse. — Dichte Sterne. — Zweite Vorlesung. Einige neue Untersuchungen: Die Geschichte vom Algol. — Die Geschichte des Begleiters des Sirius. — Unbekannte Atome und die Deutung der Spektren. — Spektralserien. — Die Wolke im Weltenraum. — Die Sonnenchromosphäre. — Die Geschichte des Beteigeuze. — Dritte Vorlesung: Das Alter der Sterne: Pulsierende Sterne. — Die Cepheiden als „Normalkerzen". — Die Kontraktionshypothese. — Inneratomare Energie. — Die Entwicklung der Sterne. — Die Strahlung von Masse. — Anhang: Weitere Bemerkungen über den Begleiter des Sirius. — Die Identifikation des Nebulium.

Zweite Sammlung astronomischer Miniaturen

Von

Elis Strömgren und **Bengt Strömgren**

Mit 41 Abbildungen. 2 Stereoskopbildern und 1 Tafel
V, 154 Seiten. 1927. RM 6.60

Inhaltsverzeichnis: Das Wunder in Jena. — Das Zweikörperproblem. — Das spezifische Gewicht der Sterne. — Beobachtungen ohne Beobachter. — Die lichtelektrische Methode zur Bestimmung der Örter der Fixsterne. — Vom Gnomon zum Meridiankreis. Ein Faber Nr. 2 als astronomisches Meßinstrument. — Störungen in den Bewegungen der Himmelskörper. — Reiserouten im Weltenraum. Von der Erde zum Monde und andere ähnliche Ausflüge. — Vom Licht als Energieform. — Der Bau der Sterne. — Die Bewegungsmöglichkeiten in kugelförmigen Sternhaufen. — Erinnerungen von einer Amerikareise. Einige Worte über amerikanische Astronomie.

Das Turmteleskop der Einstein-Stiftung

Von **Erwin Freundlich**

Mit 26 Abbildungen. III, 43 Seiten. 1927. RM 3.60

Inhaltsverzeichnis: Geschichte der Einstein-Stiftung. — Der Plan der Anlage. — Das Turmteleskop. — Die Spektralanlage: Spalt- und Kassetteneinrichtung, Gitterapparat, Prismenapparat. — Das Laboratorium und die elektrische Kraftanlage: Der elektrische Ofen. Das Mikrophotometer. — Nachwort.

Bei der Redaktion eingegangene Schriften.

Unter dieser Rubrik werden wir fortlaufend ein Verzeichnis derjenigen Schriften veröffentlichen, die uns von Verlegern oder Verfassern zu diesem Zwecke übersandt werden. Wir bitten, von dieser Gelegenheit zur Bekanntmachung neuer Schriften ausgiebig Gebrauch machen zu wollen.

Haas, A., Materiewellen und Quantenmechanik. Eine elementare Einführung auf Grund der Theorien de Broglies, Schrödingers und Heisenbergs. Gr.-8°, VIII, 160 S. Leipzig, Akademische Verlagsgesellschaft m. b. H., 1928.

Kostitzin, V. A., Sur quelques équations intégrales de la physique moléculaire. Gr.-8°, 40 S. Moskau, Institut des Mathématiques de Moscou, 1926.

Handbuch der Experimentalphysik, Bd. 19. — G. Jaffé, Dispersion und Absorption. R. Gans, Medien mit veränderlichem Brechungsindex. Lichtzerstreuung. Gr.-8°, VIII, 430 S. Leipzig, Akademische Verlagsgesellschaft m. b. H., 1928.

Recueil mathématique de la Société Math. de Moscou. Bd. XXXIV, Heft 2. Gr.-8°. 101—206 S. Moskau, 1927 (z. T. russisch).

The scientific researches of mathematics and mechanics. Nr. 16833—16835. Moskau, 1926—1927. (Russisch, z. T. mit deutschem Auszug.)

VERLAG VON JULIUS SPRINGER IN WIEN I

Soeben erschien:

Gedanken zur Naturphilosophie

Von

Prof. Dr. med. et phil. **Paul Schilder,** Wien

133 Seiten. 1928. RM 7,80

Inhaltsverzeichnis:

Erster Teil: Das Unbelebte: Vorbemerkung. — Die Masse. — Die Kraft. — Energie. — Actio in distans, Kontinuität und Diskontinuität. — Die Erhaltung der Energie. — Der zweite Satz der Thermodynamik. — Die Wahrscheinlichkeit. — Die Qualitäten. — Das psychophysische Problem. — Das Raumproblem und das Zeitproblem. — Zweiter Teil: Das Belebte: Der Organismus. — Die Bewegung. — Über den Realitätswert der Wahrnehmung. — Soma und Keimplasma. — Vererbung erworbener Eigenschaften — Modifikationen. — Vererbung erworbener Eigenschaften. — Der Instinkt. — Problem der Weichenstellung. — Die Vererbungssubstanz. — Mutation. — Konvergenz. — Kampf ums Dasein - Darwinismus. — Lamarckismus. — Gedächtnis, Denken, Art. — Trieblehre. — Lust, Unlust, Einverleibung und Ausstoßung. — Das Bewußtsein. — Tod. — Geschlechtlichkeit. — Männlich — weiblich. — Zweck und Welt.

Hierzu zwei Beilagen vom Verlag Julius Springer in Berlin W 9.

Druck von Oscar Brandstetter in Leipzig.